MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

2 April 2014

Kuliah yang Lalu

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi – Bagian I

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

Kuliah Hari Ini

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi – Bag II

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

MA1201 MATEMATIKA 2A

12.7 BIDANG SINGGUNG DAN HAMPIRAN – BAGIAN II

- Menggunakan polinom Taylor orde 2 untuk menghampiri nilai fungsi dua peubah di sekitar titik tertentu

Hampiran Linear & Bidang Singgung

Bila *f* mempunyai turunan di ***p*** = (*a*,*b*), maka kita mempunyai **hampiran linear**

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \nabla f(a,b) \bullet (x-a, y-b)$$

Dalam hal ini, persamaan

$$z = f(a,b) + \nabla f(a,b) \bullet (x-a, y-b)$$

$$= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

merupakan persamaan **bidang singgung** pada permukaan $z = f(x,y)$ di titik (a,b).

Polinom Taylor Orde 1

Terkait dengan hampiran linear & bidang singgung, polinom

$$P_1(x,y) = f(a,b) + \nabla f(a,b) \bullet (x-a, y-b)$$
$$= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

merupakan **polinom Taylor orde 1** untuk $f(x,y)$ di titik (a,b).

Hampiran linear

Dlm hal ini, $f(x,y) \approx P_1(x,y)$ untuk $(x,y) \approx (a,b)$.

Polinom Taylor Orde 2

Seperti halnya utk fungsi satu peubah, kita mempunyai **polinom Taylor orde 2** untuk fungsi dua peubah:

$$P_2(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) +$$

$$+\frac{1}{2}[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) +$$

$$+ f_{yy}(a,b)(y-b)^2].$$

Hampiran kuadratik

Dlm hal ini, $f(x,y) \approx P_2(x,y)$ untuk $(x,y) \approx (a,b)$.

Contoh/Latihan

Tentukan polinom Taylor orde 2 untuk $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ di (0,0), dan gunakan polinom tsb untuk menaksir nilai $f(0.1,0.2)$.

<u>Jawab</u>: $f_x = \ldots$, $f_y = \ldots$, $f_{xx} = \ldots$, $f_{xy} = \ldots$, $f_{yy} = \ldots$

Jadi

$$P_2(x,y) = \ldots$$

dan

$$f(0.1,0.2) \approx P(0.1,0.2) = \ldots$$

MA1201 MATEMATIKA 2A

12.8 MAKSIMUM DAN MINIMUM

- Menentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi dua peubah

Nilai Ekstrim Global

Misalkan $S \subseteq \mathbf{R}^2$, $f : S \to \mathbf{R}$, dan $\boldsymbol{p}^* \in S$.

(i) $f(\boldsymbol{p}^*)$ disebut **nilai maksimum global** f pada S apabila $f(\boldsymbol{p}^*) \geq f(\boldsymbol{p})$ untuk setiap $\boldsymbol{p} \in S$.

(ii) $f(\boldsymbol{p}^*)$ disebut **nilai minimum global** f pada S apabila $f(\boldsymbol{p}^*) \leq f(\boldsymbol{p})$ untuk setiap $\boldsymbol{p} \in S$.

Nilai $f(\boldsymbol{p}^*)$ disebut **nilai ekstrim global** f pada S apabila $f(\boldsymbol{p}^*)$ merupakan nilai maksimum global atau nilai minimum global.

Nilai Ekstrim Lokal

Misalkan $S \subseteq \mathbf{R}^2$, $f : S \to \mathbf{R}$, dan $\boldsymbol{p}^* \in S$.

(i) $f(\boldsymbol{p}^*)$ disebut **nilai maksimum lokal** f pada S apabila terdapat cakram N yang memuat $\boldsymbol{p}^*$ sehingga $f(\boldsymbol{p}^*) \geq f(\boldsymbol{p})$ untuk setiap $\boldsymbol{p} \in N \cap S$.

(ii) $f(\boldsymbol{p}^*)$ disebut **nilai minimum lokal** f pada S apabila terdapat cakram N yang memuat $\boldsymbol{p}^*$ sehingga $f(\boldsymbol{p}^*) \leq f(\boldsymbol{p})$ untuk setiap $\boldsymbol{p} \in N \cap S$.

Nilai $f(\boldsymbol{p}^*)$ disebut **nilai ekstrim lokal** f pada S apabila $f(\boldsymbol{p}^*)$ merupakan nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal.

Teorema Eksistensi Maks-Min

*Jika f kontinu pada suatu himpunan tertutup dan terbatas S, maka f mencapai nilai maksimum **dan** nilai minimum global pada S (kemungkinan di titik yang berbeda).*

Catatan. S **tertutup** berarti S *memuat* titik-titik perbatasannya. S **terbatas** berarti S *termuat* dalam suatu cakram $C(\mathbf{O},R)$ yang berpusat di $\mathbf{O}(0,0)$ dan berjari-jari R, untuk suatu $R > 0$.

Teorema Titik Kritis

Fungsi f hanya mungkin mencapai nilai ekstrim di ***titik-titik kritis****, yaitu di:*

(i) **titik-titik perbatasan** daerah asal f, atau

(ii) **titik-titik stasioner** (yaitu titik di mana f mempunyai turunan **0**), atau

(iii) **titik-titik singular** (yaitu titik di mana f tidak mempunyai turunan).

Contoh

1. Fungsi $f(x,y) = x^2 + y^2$ mencapai nilai minimum 0 di (0,0) yang merupakan titik stasioner.
2. Fungsi $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ mencapai nilai minimum 0 di (0,0) yang merupakan titik singular.
3. Jika kita batasi daerah asal kedua fungsi di atas pada cakram tertutup $C(\mathbf{O},1)$, maka kedua fungsi di atas mencapai nilai maksimum 1 pada setiap titik perbatasan.

Catatan

Titik stasioner **belum tentu** merupakan titik ekstrim. Sebagai contoh, fungsi $F(x,y) = xy$ mempunyai titik stasioner (0,0), tetapi titik ini **bukan** merupakan titik ekstrim (global maupun lokal). Ingat peta konturnya seperti apa!

Jika daerah asal fungsi F dibatasi pada cakram tertutup $C(\mathbf{O},1)$, maka nilai ekstrimnya hanya mungkin tercapai di titik perbatasan, yaitu pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$. [*Kita bahas bagaimana mencari nilai ekstrimnya nanti, ya!*]

Uji Turunan Kedua:
Syarat Cukup untuk Nilai Ekstrim

Misalkan $f(x,y)$ mempunyai turunan parsial kedua yang kontinu pada suatu cakram yang berpusat di (a,b) dan $\nabla f(a,b) = (0,0)$. Tulis

$$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2.$$

Maka

1. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(a,b) < 0$, maka $f(a,b)$ merupakan nilai maksimum lokal.
2. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(a,b) > 0$, maka $f(a,b)$ merupakan nilai minimum lokal.
3. Jika $D < 0$, maka (a,b) merupakan titik pelana.
4. Jika $D = 0$, maka uji ini gagal.

Contoh

Tentukan nilai ekstrim dari $F(x,y) = x^3 + y^2 - 3x + 4y$, jika ada.

<u>Jawab</u>: $F_x = 3x^2 - 3 = 0$ j.h.j. $x = \pm 1$, dan $F_y = 2y - 4 = 0$ j.h.j. $y = 2$. Jadi ada 2 titik stasioner, yaitu $(1,2)$ dan $(-1,2)$. Selanjutnya, $F_{xx} = 6x$, $F_{xy} = 0$, dan $F_{yy} = 2$.

Di $(1,2)$, $F_{xx} = 6(1) = 6 > 0$ dan $D = 6(2) - 0^2 = 12 > 0$. Jadi $F(1,2) = 10$ merupakan nilai minimum lokal.

Di $(-1,2)$, $F_{xx} = 6(-1) = -6 < 0$ dan $D = -6(2) - 0^2 = -12 < 0$. Jadi $(-1,2)$ merupakan titik pelana (bukan ekstrim).

Soal 1

Misalkan anda ingin membuat kotak tertutup dengan volume 1 dm^3 dan luas permukaannya minimum. Berapakah ukuran kotak tsb?

Soal 2

Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari $F(x,y) = xy$ pada cakram tertutup $C(\mathbf{O},1)$.

<u>Jawab</u>: Nilai ekstrimnya tercapai di perbatasan, yaitu pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$. Untuk mencarinya, nyatakan titik-titik pada lingkaran tsb dalam koordinat polar, yakni $x = \cos\theta$ dan $y = \sin\theta$.

Maka, $F(x,y) = F(r,\theta) = (\cos\theta)(\sin\theta) = ½ \sin 2\theta$. Jadi: F mencapai nilai maksimum pd saat $\theta = \pi/4$ dan $5\pi/4$, yakni di titik $(½\sqrt{2},½\sqrt{2})$ dan $(-½\sqrt{2},-½\sqrt{2})$; dan F mencapai nilai minimum pd saat $\theta = 3\pi/4$ dan $7\pi/4$, yakni di titik $(-½\sqrt{2},½\sqrt{2})$ dan $(½\sqrt{2},-½\sqrt{2})$.

Catatan

Soal 2 dapat pula dijawab dengan menggambar peta kontur dan mengamati bahwa nilai ekstrim tercapai pada perbatasan, khususnya di 4 buah titik perpotongan lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dengan garis $y = \pm x$.