

MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

4 April 2014

Kuliah yang Lalu

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi – Bag II

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

Kuliah Hari Ini

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi – Bag II

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

12.9 METODE PENGALI LAGRANGE

1. Menggunakan Metode Lagrange untuk menentukan nilai ekstrim fungsi dua atau tiga peubah *dengan kendala tertentu*

Mencari Nilai Ekstrim Fungsi pada Suatu Kurva/Permukaan

Ingat bagaimana kita mencari nilai ekstrim fungsi $F(x,y) = xy$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$.

Demikian juga soal tentang ukuran kotak bervolume 1 yang luas permukaannya minimum.

Kedua soal ini termasuk contoh masalah nilai ekstrim dengan kendala.

Masalah Nilai Ekstrim dengan Kendala

Masalah I:

Tentukan nilai ekstrim fungsi $z = F(x,y)$
dengan kendala $g(x,y) = 0$.

Masalah II:

Tentukan nilai ekstrim fungsi $w = F(x,y,z)$
dengan kendala $g(x,y,z) = 0$.

Catatan. Fungsi F disebut **fungsi objektif**,
sedangkan fungsi g disebut **fungsi kendala**.

Catatan

1. Pada soal tentang kotak, kita ingin mencari nilai minimum dari $L = 2(xy + xz + yz)$ dengan kendala $xyz = 1$. [Di sini, fungsi kendalanya adalah $g(x,y,z) = xyz - 1$.]

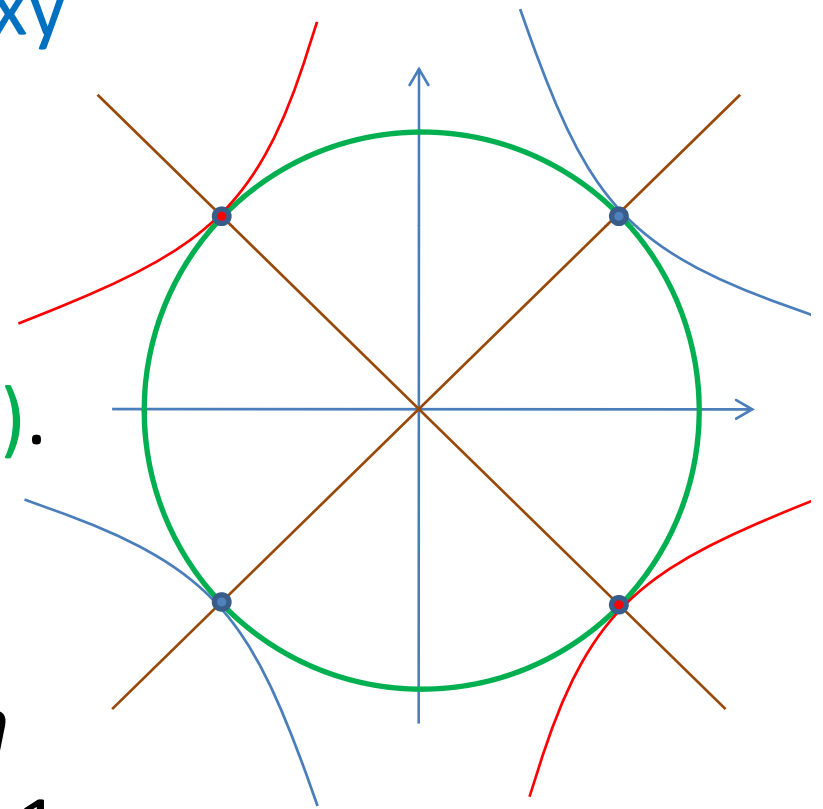
Untuk soal ini, kita dapat mensubstitusikan $z = 1/(xy)$ pada L , sehingga L menjadi fungsi dari x dan y saja, lalu kita peroleh nilai minimum dari L (dengan Uji Turunan Kedua).

Catatan

3. Pada soal pertama, kita ingin mencari nilai ekstrim dari $F = xy$ dengan kendala $x^2 + y^2 = 1$. Untuk soal ini kita tidak mensubstitusikan $y = \pm(1 - x^2)^{1/2}$ pada persamaan $F = xy$, tetapi melakukan parametrisasi lingkaran $x = \cos \theta$ dan $y = \sin \theta$, dan menyatakan F sebagai fungsi dari parameter θ , lalu kita peroleh nilai ekstrimnya.

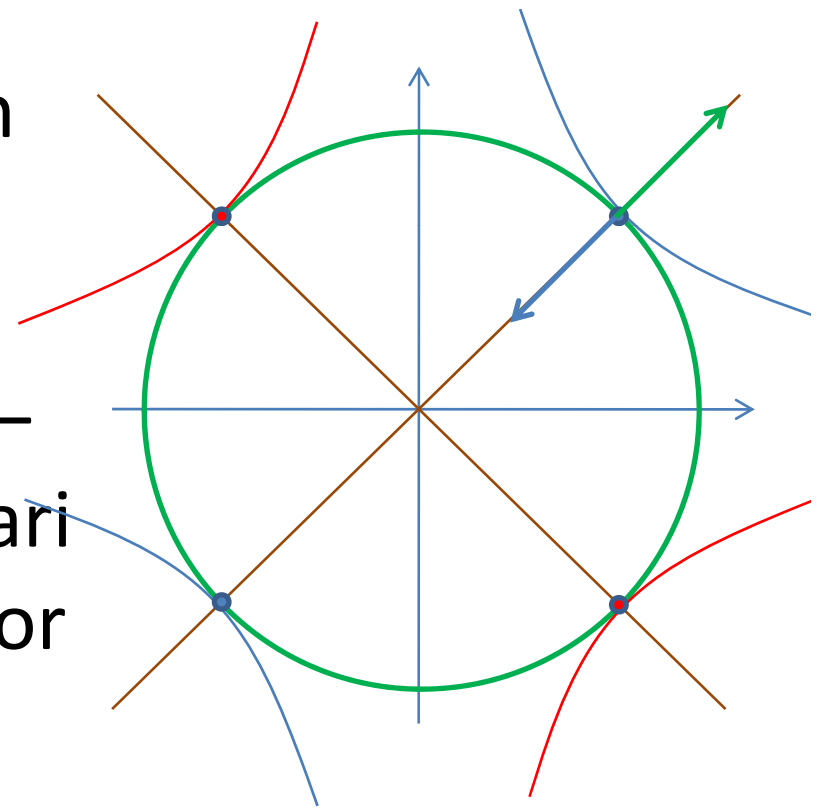
Catatan

4. Nilai ekstrim dari $F(x,y) = xy$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dapat pula diperoleh dgn mengamati peta kontur F pd cakram tertutup $C(\mathbf{0},1)$. Nilai ekstrim tercapai di titik-titik di mana kurva ketinggian *bersinggungan* dengan lingkaran $x^2 + y^2 = 1$.



Catatan

4. (lanjutan) ... Di titik-titik tersebut, kurva ketinggian dan kurva kendala mempunyai vektor singgung yang *sejajar*! Jadi, di titik – titik tsb, vektor gradien dari $F(x,y)$ sejajar dengan vektor gradien dari $g(x,y)$, yakni $\nabla F(\bar{p}^*) = \lambda \nabla g(\bar{p}^*)$.



Metode Lagrange

Untuk mencari nilai ekstrim dari $F(\mathbf{p})$ dengan kendala $g(\mathbf{p}) = 0$, tentukan \mathbf{p} dan λ yang memenuhi persamaan

$$\nabla F(\bar{\mathbf{p}}) = \lambda \nabla g(\bar{\mathbf{p}}) \quad \text{dan} \quad g(\bar{\mathbf{p}}) = 0.$$

Titik-titik \mathbf{p} yang diperoleh merupakan titik kritis F yang memenuhi kendala $g(\mathbf{p}) = 0$, dan bilangan λ disebut **pengali Lagrange** yang bersesuaian.

Catatan

Metode Lagrange tidak memberikan kesimpulan apakah titik kritis tsb merupakan titik ekstrim atau bukan. Untuk menentukan apakah titik tsb merupakan titik ekstrim atau bukan, kita harus menggunakan argumentasi lainnya.

Jika hanya terdapat satu titik kritis, kesimpulan mudah diambil. Jika terdapat lebih dari satu titik kritis, kita dapat membandingkan nilai fungsi di titik-titik tersebut (sebagai contoh, nilai terbesar akan menjadi nilai maksimum).

Contoh 1

Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari $F(x,y) = xy$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$.

Jawab: Di sini fungsi kendalanya adalah $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Dengan Metode Lagrange, kita cari x , y , dan λ yang memenuhi

$$\nabla F(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \text{dan} \quad g(x, y) = 0.$$

Dari persamaan pertama, kita peroleh $y = 2\lambda x$ dan $x = 2\lambda y$. Eliminasi λ , kita dapatkan $y^2 = x^2$, sehingga $y = \pm x$. Substitusikan ke persamaan kedua, kita peroleh $2x^2 = 1$, sehingga $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Nilai maks tercapai di $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, min tercapai di $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$.

Contoh 2

Tentukan ukuran kotak tertutup dengan volume 1 dm³ yang luas permukaannya minimum.

Jawab: Di sini fungsi objektifnya adalah $L = 2(xy + xz + yz)$ dan fungsi kendalanya adalah $g(x,y,z) = xyz - 1$.

Dengan Metode Lagrange, kita peroleh persamaan

$$2y + 2z = \lambda yz$$

$$2x + 2z = \lambda xz$$

$$2x + 2y = \lambda xy$$

Eliminasi λ , kita dapatkan $x = y = z$. Substitusikan ini ke persamaan kedua, kita peroleh $x^3 = 1$, sehingga $x = 1$, dan dengan demikian $y = z = 1$ juga.

Titik yg diperoleh, (1,1,1), merupakan titik minimum.

Soal 1

Tentukan titik pada bidang $x + 2y + 3z = 6$ yang terdekat dari titik asal $O(0,0,0)$.

Jawab: Di sini kita ingin mencari titik yang meminimumkan $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ dgn kendala $g(x,y,z) = x + 2y + 3z - 6 = 0$. Jadi...

Soal 2

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $F(x,y) = 1 + xy - x^2 - y^2$ pada cakram tertutup $C(\mathbf{0},1) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Jawab: F kontinu pada $C(\mathbf{0},1)$, jadi F mencapai nilai maksimum dan minimum pada $C(\mathbf{0},1)$.

Karena F tidak mempunyai titik singular, nilai ekstrim F kemungkinan dicapai di titik stasioner dan di titik-titik perbatasan. Jadi, kita cari terlebih dahulu titik stasionernya, dan setelah itu cari titik-titik kritis pada lingkaran perbatasan.

Jawab (lanjutan): $\nabla F(x, y) = (y - 2x, x - 2y)$.

Jadi, satu-satunya titik stasioner F adalah $(0,0)$.

Kemudian, dengan metode Lagrange, akan diperoleh empat titik kritis, yaitu $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2})$
[Perhitungan lengkapnya diberikan di papan tulis ya...].

Selanjutnya tinggal bandingkan nilai F di lima titik kritis tsb, dan simpulkan bahwa F mencapai nilai maksimum 1 di $(0,0)$, dan mencapai nilai minimum $-\frac{1}{2}$ di $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$.

12.9 METODE PENGALI LAGRANGE

2. Menggunakan Metode Lagrange untuk menentukan nilai ekstrim fungsi **tiga** peubah dengan *dua* kendala

Masalah Nilai Ekstrim Fungsi Tiga Peubah dengan Dua Kendala

Untuk menentukan nilai maksimum/minimum dari fungsi $F(x,y,z)$ dengan kendala $g(x,y,z) = 0$ dan $h(x,y,z) = 0$, kita selesaikan persamaan

$$\nabla F(\bar{p}) = \lambda \nabla g(\bar{p}) + \mu \nabla h(\bar{p}),$$

$$g(\bar{p}) = 0 \quad \text{dan} \quad h(\bar{p}) = 0,$$

Titik $\mathbf{p} = (x,y,z)$ yang diperoleh merupakan titik kritis $F(x,y,z)$. Bilangan λ dan μ adalah pengali Lagrange yang bersesuaian.

Contoh

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $F(x,y,z) = x + 2y + z$ pada kurva perpotongan tabung $x^2 + y^2 = 2$ dengan bidang $y + z = 1$.

Jawab: Di sini fungsi kendalanya adalah $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2$ dan $h(x,y,z) = y + z - 1$. Persamaan Lagrange yang harus diselesaikan adalah

$$(1,2,1) = \lambda(2x,2y,0) + \mu(0,1,1),$$

$$x^2 + y^2 = 2 \text{ dan } y + z = 1.$$

[Lanjutannya di papan tulis...]

Soal

Tentukan titik pada garis yang merupakan perpotongan bidang $x + y + z = 8$ dan $2x - y + 3z = 28$ yang terdekat dari titik asal $O(0,0,0)$.

Jawab: Di sini kita ingin mencari titik yang meminimumkan $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ dgn kendala $g(x,y,z) = x + y + z - 8 = 0$ dan $h(x,y,z) = 2x - y + 3z - 28 = 0$. Jadi...