MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

11 April 2014

Kuliah yang Lalu

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi – Bag II

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

Kuliah Hari Ini

13.1 Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

13.2 Integral Berulang

13.3 Integral Lipat Dua atas Daerah Bukan Persegi Panjang

13.4 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

13.5 Penggunaan Integral Lipat Dua

13.1 INTEGRAL LIPAT DUA ATAS PERSEGI PANJANG

Menghitung atau menaksir integral lipat dua atas persegi panjang dengan menggunakan definisi

Ingat: Integral Tentu untuk Fungsi Satu Peubah

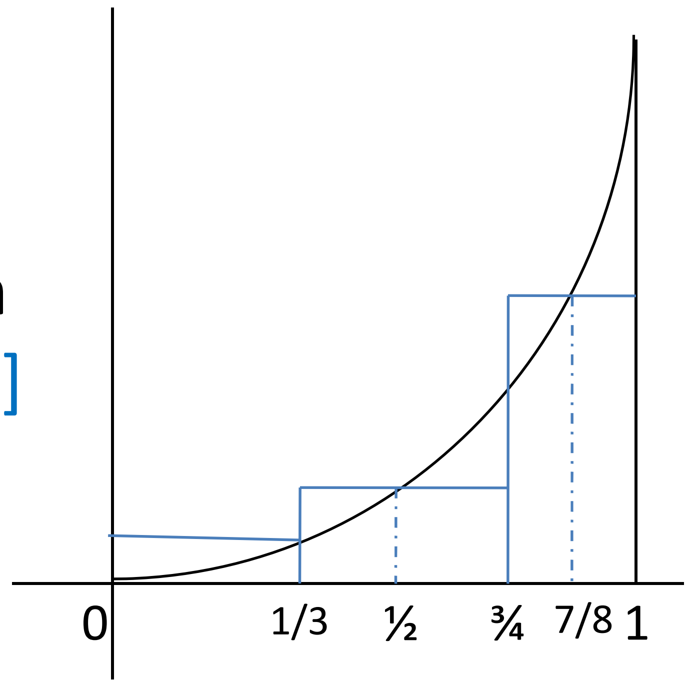
Jumlah Riemann untuk f, $\sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$,

merupakan *hampiran* untuk luas daerah di bawah kurva y = f(x), x ϵ [a,b]. Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

ada, maka f dikatakan **terintegralkan** pada [a,b]. **Integral tentu** f pada [a,b] didefinisikan sebagai

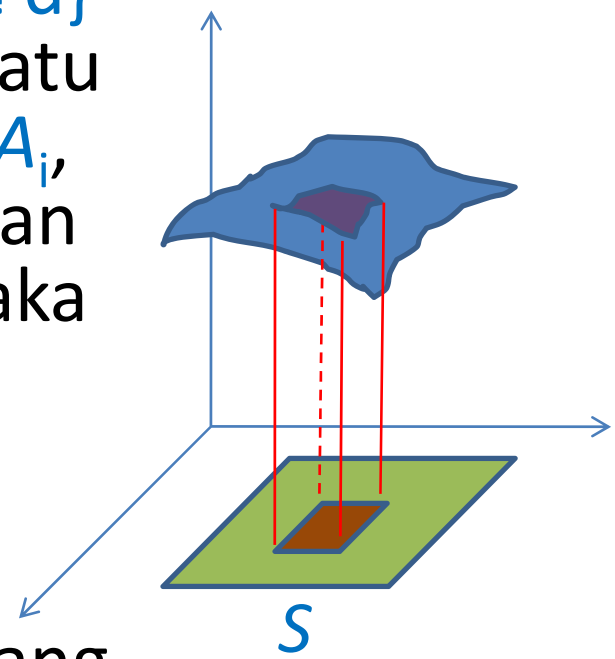
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$



Jumlah Riemann Fungsi Dua Peubah

Misalkan $S = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ dan $f : S \rightarrow \mathbf{R}$ kontinu (kecuali pd suatu kurva) dan terbatas. Bentuk partisi A_i, dengan panjang Δx_i dan lebar Δy_i, dan di tiap A_i pilih titik sampel (x_i,y_i). Maka diperoleh **jumlah Riemann**

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$



yg merupakan hampiran volume ruang di antara permukaan $z = f(x,y)$ dan persegi panjang S.

Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Misalkan *f* fungsi dua peubah yang terdefinisi pada persegi panjang *S*. Jika

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

ada, maka *f* dikatakan **terintegralkan** pada *S*. Selanjutnya,

$$\iint_S f(x,y)\,dA := \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

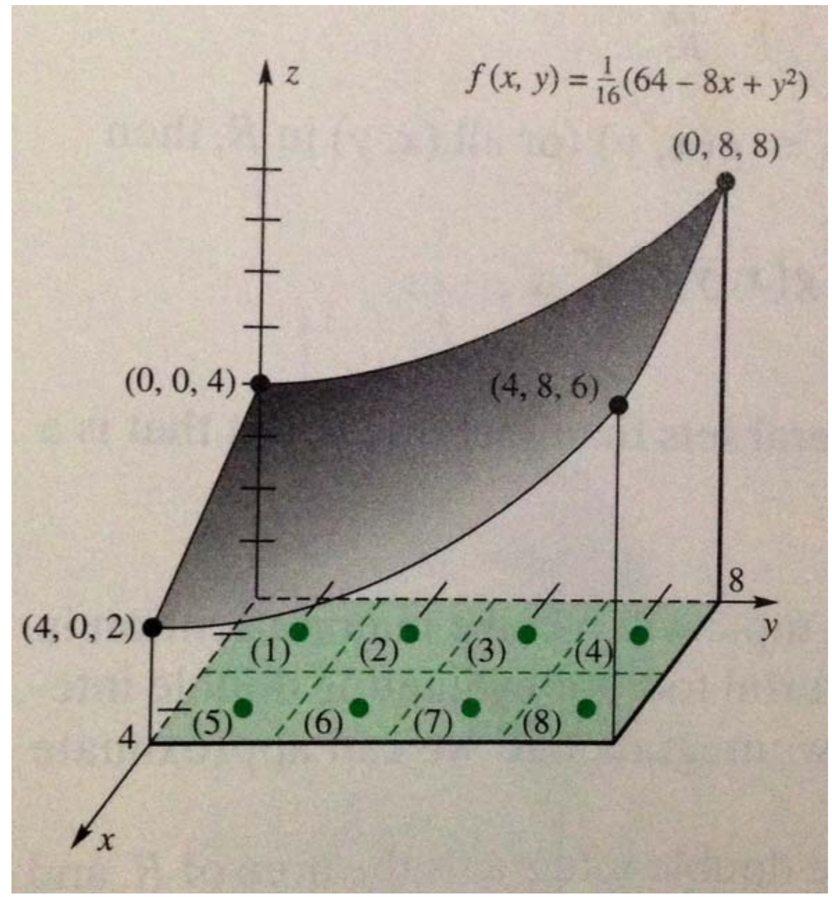
disebut **integral lipat dua** dari *f* pada *S*.

Contoh

Diketahui persegi panjang $S = \{(x,y) : 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 8\}$.

Taksir nilai $\displaystyle\iint_S \frac{64 - 8x + y^2}{16}\, dA$

dengan jumlah Riemann, dengan membagi S atas 8 persegi sama besar dan memilih titik-titik tengah tiap persegi sebagai titik sampelnya.



Jawab: Kita hitung nilai f di titik-titik sampel:

$f(1,1) = 57/16$, $f(1,3) = 65/16$, $f(1,5) = 81/16$, $f(1,7) = 105/16$, $f(3,1) = 41/16$, $f(3,3) = 49/16$, $f(3,5) = 65/16$, $f(3,7) = 89/16$.

Lalu, dengan $\Delta A_i = 4$, kita peroleh

$$\iint_S \frac{64 - 8x + y^2}{16}\, dA \approx \sum_{i=1}^{8} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

$$= \frac{4}{16}(57 + 65 + 81 + 105 + 41 + 49 + 65 + 89) = 138.$$

Teorema Keterintegralan

Jika f kontinu (kecuali pd suatu kurva) dan terbatas pada persegi panjang S, maka f terintegralkan pada S.

Contoh: Setiap polinom dua peubah terintegralkan pada sembarang persegi panjang.

Sifat-Sifat Integral Lipat Dua

1. Linear: Jika $k \in \mathbf{R}$, maka

   a. $$\iint_S kf(x,y)\,dA = k\iint_S f(x,y)\,dA.$$

   b. $$\iint_S [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_S f(x,y)\,dA + \iint_S g(x,y)\,dA$$

2. Aditif: Jika $S = S_1 \cup S_2$, maka

   $$\iint_S f(x,y)\,dA = \iint_{S_1} f(x,y)\,dA + \iint_{S_2} f(x,y)\,dA$$

3. Monoton: Jika $f(x,y) \le g(x,y)$ utk $(x,y) \in S$, maka

   $$\iint_S f(x,y)\,dA \le \iint_S g(x,y)\,dA.$$

MA1201 MATEMATIKA 2A

13.2 INTEGRAL BERULANG

Menghitung integral lipat dua (pada persegi panjang) sebagai integral berulang

Menghitung Integral Lipat Dua

Jika f terintegralkan pada persegi panjang $S = [a,b] \times [c,d]$, maka integral lipat dua dari f pada S dapat dihitung sebagai **integral berulang**:

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

atau

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Catatan: Pada cara pertama, ruang diiris sejajar sumbu-x terlebih dahulu.

Contoh 1

Jika $S = \{(x,y) : 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 8\} = [0,4] \times [0,8]$, hitung $\iint_S \frac{64 - 8x + y^2}{16}\, dA$ sbg integral berulang dengan mengintegralkan thd x terlebih dahulu.

<u>Jawab</u>:
$$\iint_S \frac{64 - 8x + y^2}{16}\, dA = \int_0^8 \int_0^4 \left(4 - \frac{x}{2} + \frac{y^2}{16} \right) dx\,dy$$
$$= \int_0^8 \left(12 + \frac{y^2}{4} \right) dy$$
$$= 96 + \frac{512}{12} = 138\frac{2}{3}.$$

Contoh 2

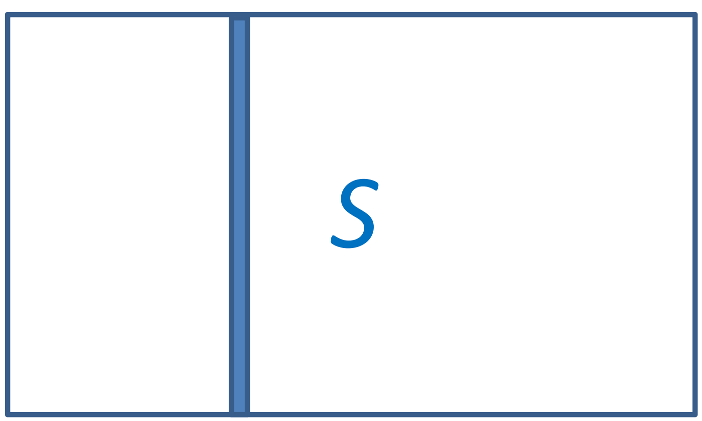
Jika $S = \{(x,y) : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 8\} = [0,4] \times [0,8]$, hitung $\iint_S \frac{64-8x+y^2}{16} dA$ sbg integral berulang dengan mengintegralkan thd y terlebih dahulu.

<u>Jawab</u>: $\iint_S \frac{64-8x+y^2}{16} dA = \int_0^4 \int_0^8 \left(4 - \frac{x}{2} + \frac{y^2}{16} \right) dy dx$

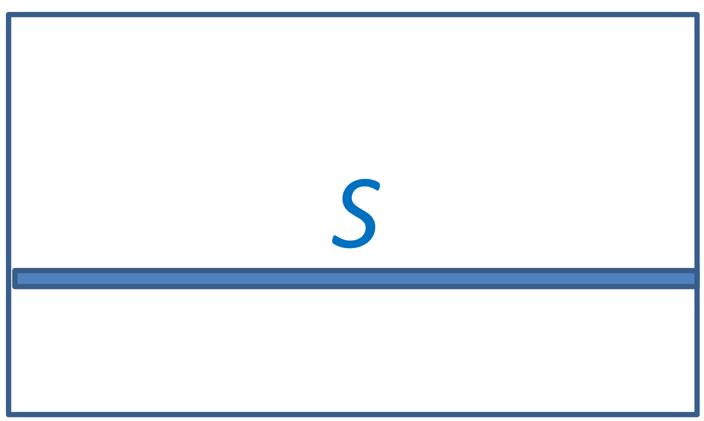
Catatan

Pengintegralan berulang:

Terhadap y dahulu, lalu terhadap x:



Terhadap x dahulu, lalu terhadap y:



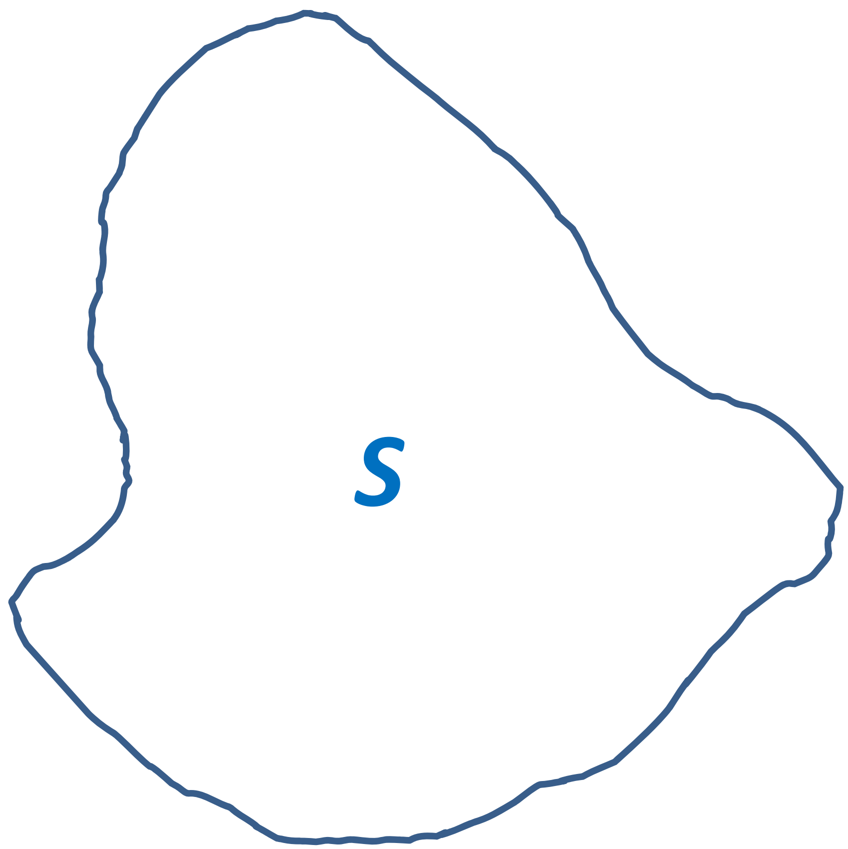
Soal

Jika $S = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} = [0,1] \times [0,1]$,
hitung $\iint_S xe^{xy}\, dA$ sebagai integral berulang.

13.3 INTEGRAL LIPAT DUA ATAS DAERAH BUKAN PERSEGI PANJANG

Menghitung integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang

Bagaimana menghitung integral lipat pada daerah bukan persegi panjang?



Integral pada Daerah y-Sederhana

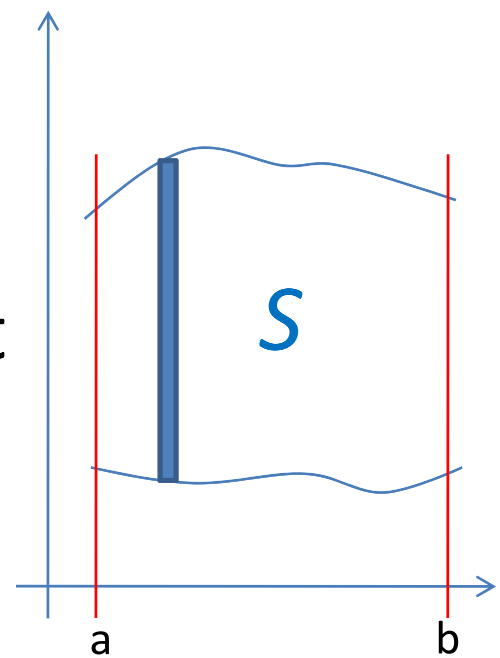
Himpunan *S* disebut *y*-sederhana apabila *S* dapat dituliskan sebagai

$S = \{(x,y) : u_1(x) \le y \le u_2(x),\ a \le x \le b\}$,

dengan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ kontinu.

Dalam hal ini, integral *f* pada *S* dapat dihitung sebagai

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$



Integral pada Daerah x-Sederhana

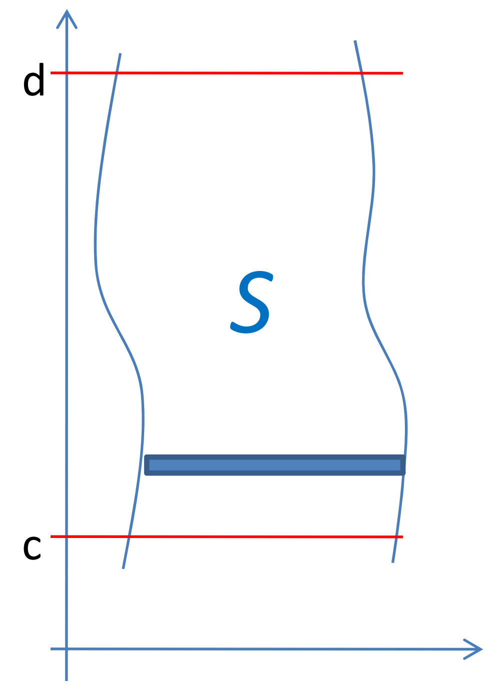
Himpunan *S* disebut *x*-sederhana apabila *S* dapat dituliskan sebagai

$S = \{(x,y) : v_1(y) \leq x \leq v_2(y),\ c \leq y \leq d\}$,

dengan $v_1(y)$ dan $v_2(y)$ kontinu.

Dalam hal ini, integral *f* pada *S* dapat dihitung sebagai

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{v_1(y)}^{v_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$



Contoh 1

Hitung $\iint_S xy\,dA$ apabila S adalah daerah tertutup yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 1$.

<u>Jawab</u>:

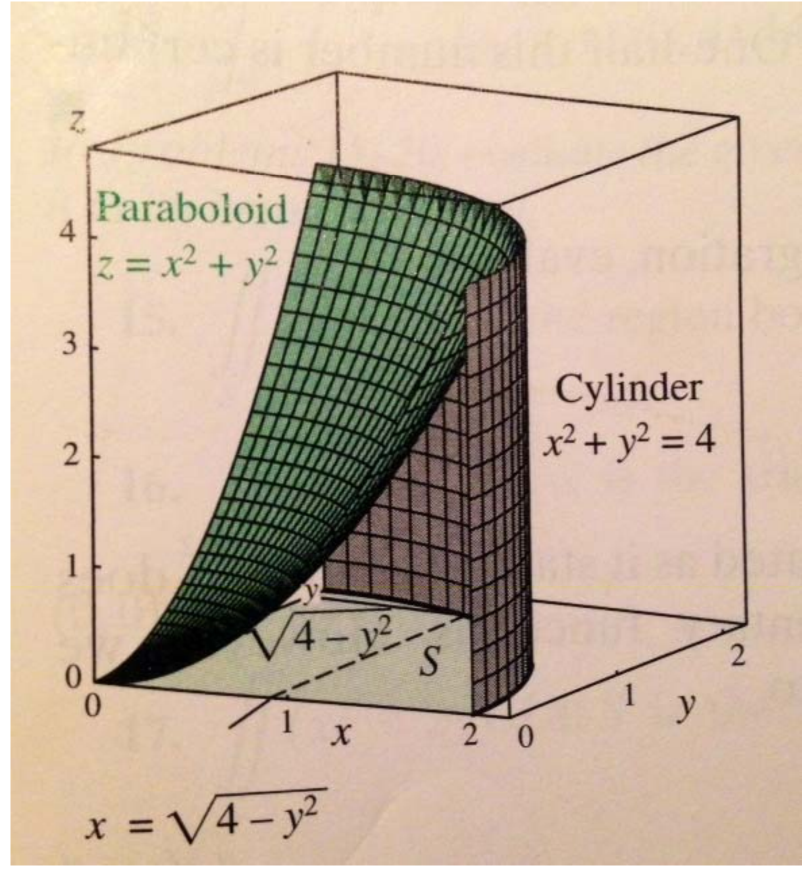
Contoh 2

Hitung $\iint_S e^{x^2} dA$ apabila S adalah daerah tertutup yang dibatasi oleh garis $y = 2x$, garis $x = 4$, dan sumbu-x.

<u>Jawab</u>:

Soal 1

Tentukan volume benda pejal yang terletak di Oktan I dan dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$, tabung $x^2 + y^2 = 4$, dan bidang-bidang koordinat.



Soal 2

Hitung $\iint_S x^2 \, dA$ apabila S adalah daerah cincin yg dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$.