MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

16 April 2014

Kuliah yang Lalu

13.1 Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

13.2 Integral Berulang

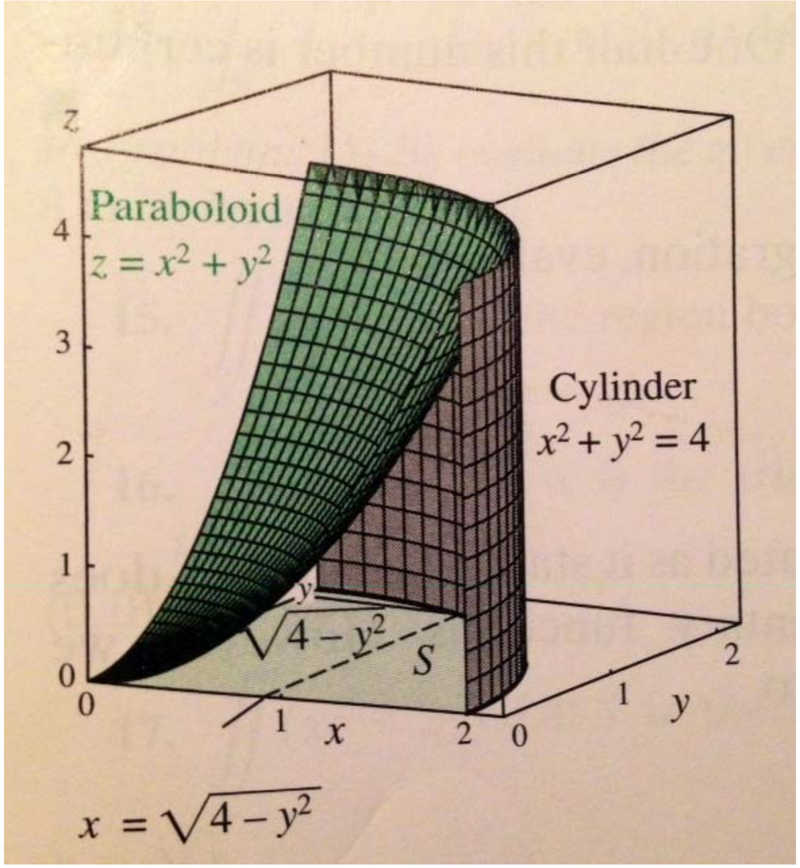
13.3 Integral Lipat Dua atas Daerah Bukan Persegi Panjang

13.4 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

13.5 Penggunaan Integral Lipat Dua

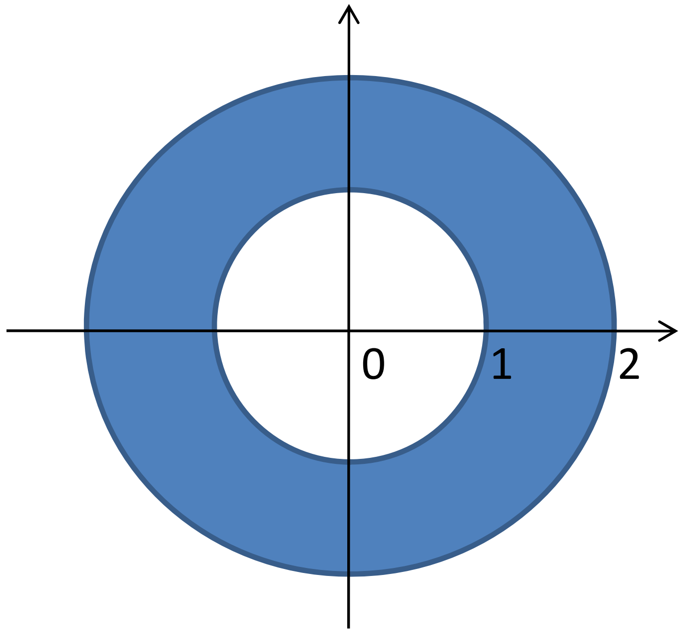
Soal 1

Tentukan volume benda pejal yang terletak di Oktan I dan dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$, tabung $x^2 + y^2 = 4$, dan bidang-bidang koordinat.



Soal 2

Hitung $\iint_S x^2 dA$ apabila S adalah daerah cincin yg dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$.



Soal 1 dan 2 lebih mudah dikerjakan dlm koordinat polar!

Kuliah Hari Ini

13.1 Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

13.2 Integral Berulang

13.3 Integral Lipat Dua atas Daerah Bukan Persegi Panjang

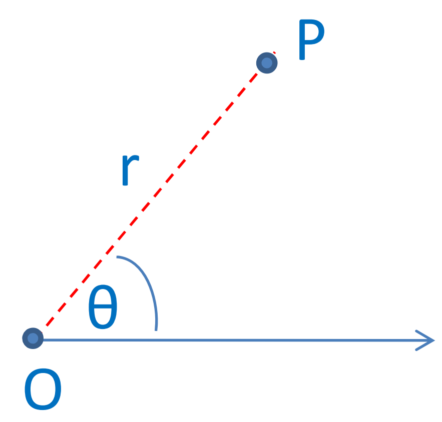
13.4 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

13.5 Penggunaan Integral Lipat Dua

Ingat: Sistem Koordinat Polar

Sistem koordinat polar terdiri dari **sumbu polar** (berupa setengah garis, yang berimpit dengan sumbu-x positif pada bidang $\mathbf{R}^2$) dan **titik asal** O.

Setiap titik P pada bidang kemudian dinyatakan dengan jaraknya dari O, sebutlah r, dan besar sudut θ yang dibentuk oleh ruas garis OP dan sumbu polar (dihitung *berlawanan arah dengan arah jarum jam*).



$P = P(r,\theta)$

Hubungan Koordinat Polar dan Koordinat Cartesius

Jika $P = P(r,\theta)$, maka P dapat dinyatakan dalam koordinat Cartesius sebagai $P = P(x,y)$ dengan

$$x = r \cos \theta \quad \text{dan} \quad y = r \sin \theta.$$

Sebaliknya, jika $P = P(x,y)$, maka P dapat dinyatakan dalam koordinat polar $P = P(r,\theta)$ dengan

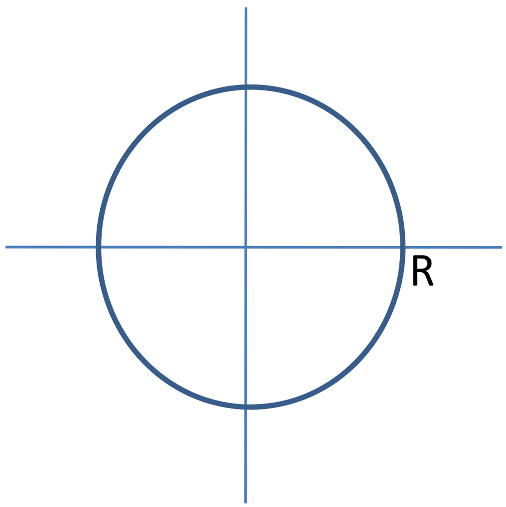
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{dan} \quad \tan \theta = y/x,$$

dengan penafsiran nilai θ yg tepat untuk $x = 0$.

Persamaan Kurva dalam Koordinat Polar

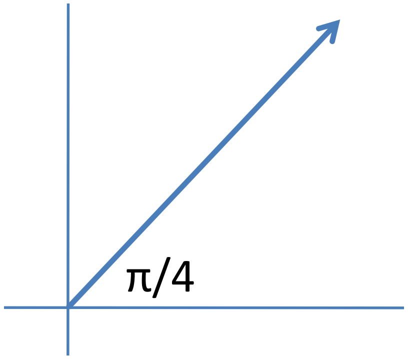
Persamaan lingkaran yang ber-pusat di O dan berjari-jari R dapat dinyatakan secara sederhana dalam koordinat polar sebagai

$$r = R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$



Persamaan setengah garis $y = x$, dengan $x > 0$, dapat dinyatakan dalam koordinat polar sebagai

$$\theta = \pi/4, \quad r > 0.$$



13.4 INTEGRAL LIPAT DUA DALAM KOORDINAT POLAR

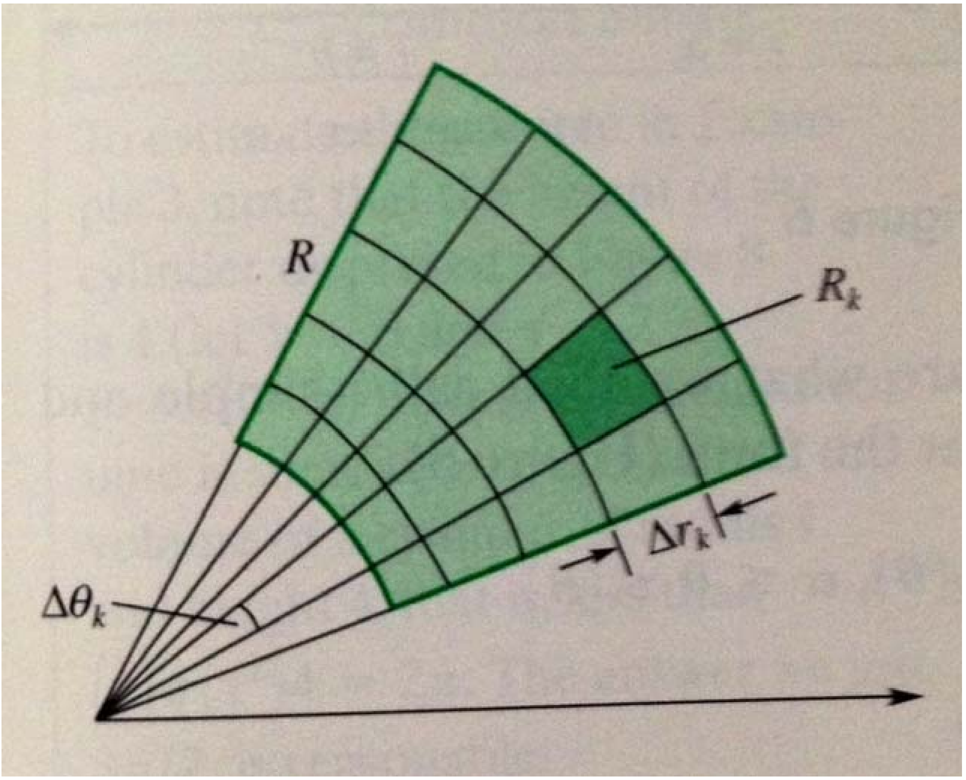
Menghitung integral lipat dua dalam koordinat polar

Elemen Luas dalam Koordinat Polar

Bila dalam koordinat Cartesius elemen luas ΔA sama dengan $\Delta x.\Delta y$, maka dalam koordinat polar

$$\Delta A = r.\Delta r.\Delta\theta.$$

Dari mana datangnya rumus ini? Lihat gambar di samping.



Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

Dengan substitusi $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$, integral lipat dua yang semula dinyatakan dalam koordinat Cartesius sekarang dinyatakan dalam koordinat polar sebagai:

$$\iint_S f(x, y)\,dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

<u>Catatan</u>: Dalam koordinat polar, daerah seperti setengah lingkaran atau cincin setara dengan "persegi panjang".

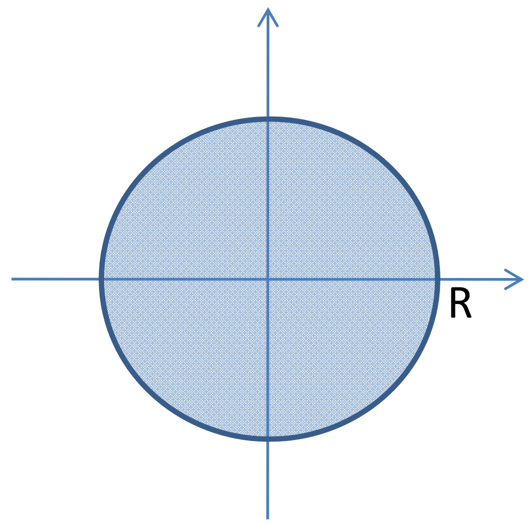
Daerah dalam Koordinat Polar

Daerah cakram lingkaran

$$S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

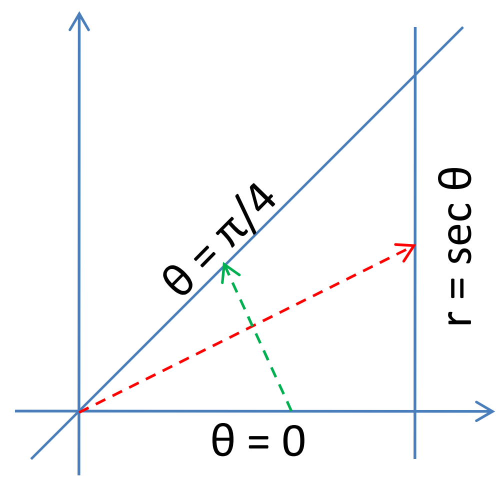
dapat dinyatakan sebagai

$$S = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$



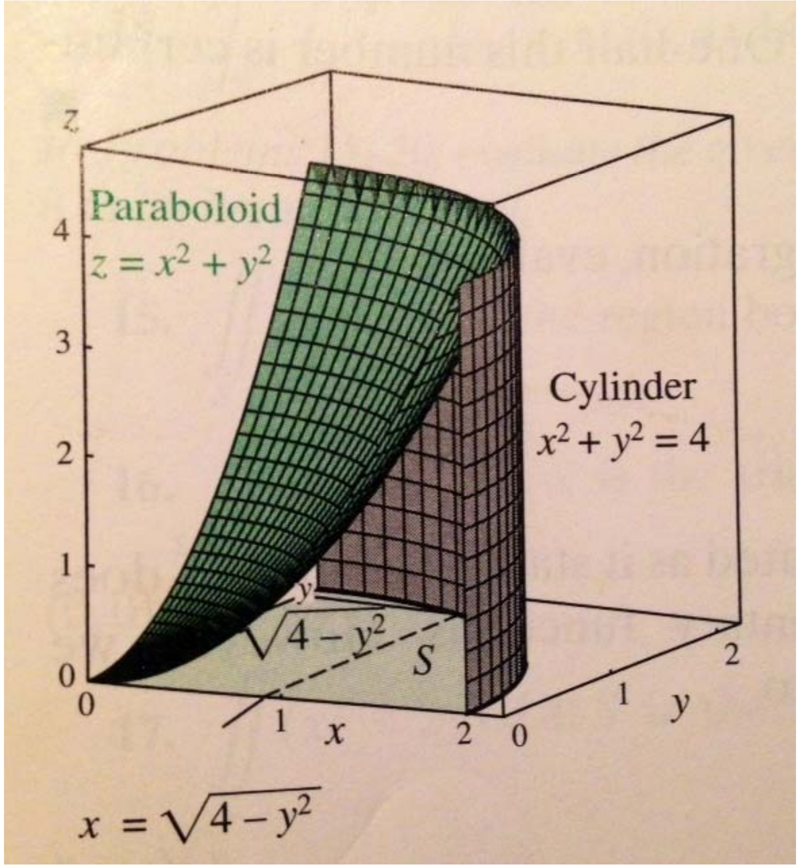
Daerah segitiga yang dibatasi oleh sumbu-x, garis $y = x$, dan garis $x = 1$, merupakan daerah r-sederhana, dengan

$$0 \leq r \leq \sec\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4.$$



Contoh 1

Tentukan volume benda pejal yang terletak di Oktan I dan dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$, tabung $x^2 + y^2 = 4$, dan bidang-bidang koordinat.



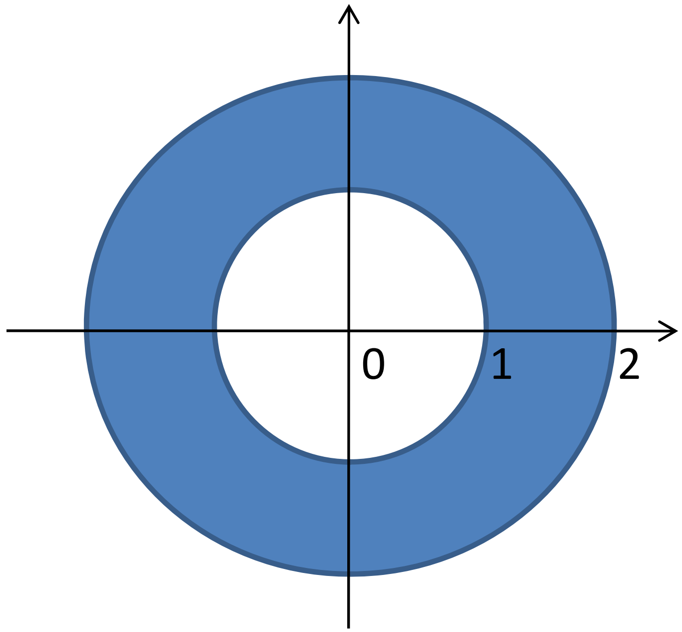
Jawab: $V = \iint_S (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2\, r\,dr\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} 4\,d\theta = 2\pi$$

Contoh 2

Hitung I = $\iint\limits_S x^2 dA$ apabila

S adalah daerah cincin yg dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$.



Jawab: $I = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2 \cos^2\theta . r dr d\theta$

$= \ldots$

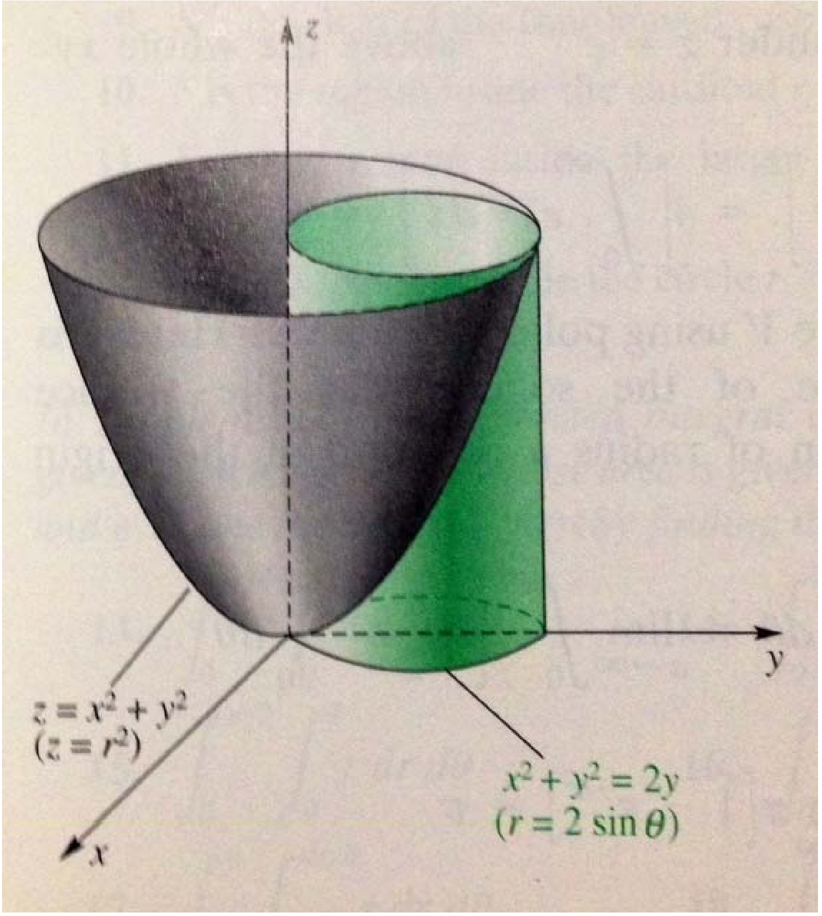
Soal 1

Hitung $I = \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dA$ bila S adalah daerah segitiga yang dibatasi oleh sumbu-x, garis $y = x$, dan garis $x = 1$.

Jawab: $I = \ldots$

Soal 2

Tentukan volume benda pejal yang dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$, tabung $x^2 + y^2 = 2y$, dan bidang-xy.



Jawab: $V = \ldots$

Soal 3

Buktikan bahwa $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \, dy\,dx = \frac{\pi}{4}.$

Jawab:

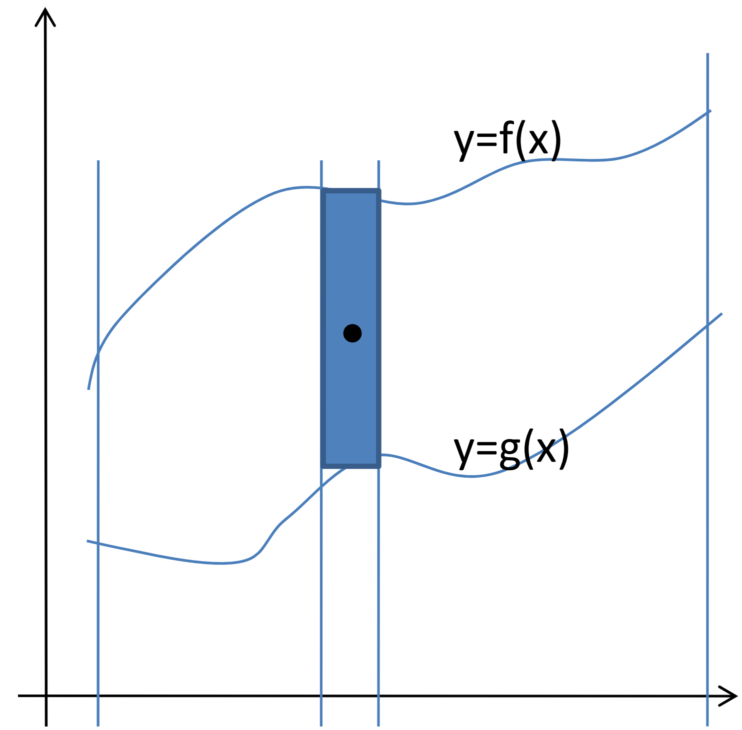
MA1201 MATEMATIKA 2A

13.5 PENGGUNAAN INTEGRAL LIPAT

Menentukan massa dan pusat massa lamina dengan menggunakan integral lipat dua

Ingat: Distribusi Massa pada Bidang

Misal kita mempunyai sebuah **lamina** (keping datar) dengan rapat massa δ **konstan**, yang menempati daerah pada bidang yang dibatasi oleh garis $x = a$ dan $x = b$ serta kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) \geq g(x)$ pada $[a, b]$.



$\Delta m \approx \delta[f(x) - g(x)].\Delta x$

$\Delta M_y \approx \delta x[f(x) - g(x)].\Delta x$

$\Delta M_x \approx \frac{1}{2}\delta[f(x)^2 - g(x)^2].\Delta x$

Momen dan Pusat Massa Lamina

Dari taksiran irisan tadi, kita peroleh

Massa: $$m = \delta \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Momen thd sb-y: $$M_y = \delta \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

Momen thd sb-x: $$M_x = \frac{\delta}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$$

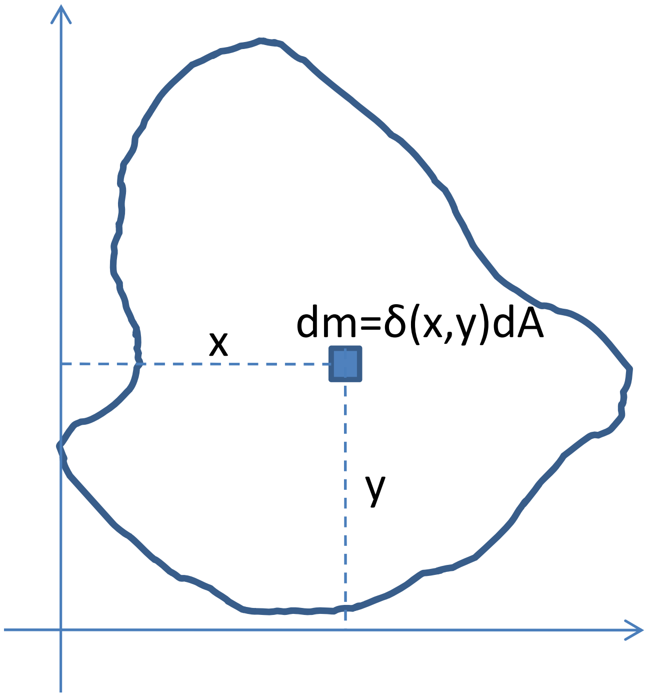
Pusat massa: $$x^* = \frac{M_y}{m};\, y^* = \frac{M_x}{m}.$$

Massa dan Pusat Massa Lamina dengan Rapat Massa δ(x,y)

Massa: $$m = \iint_S \delta(x, y)\,dA$$

Momen thd Sb-x: $$M_y = \iint_S x\delta(x, y)\,dA$$

Momen thd Sb-y: $$M_x = \iint_S y\delta(x, y)\,dA$$



Pusat Massa: $$x^* = \frac{M_y}{m};\ y^* = \frac{M_x}{m}.$$

Catatan: Bila rapat massanya δ konstan, maka rumus ini sama dgn rumus sebelumnya.

Contoh/Latihan 1

Tentukan massa dan pusat massa lamina yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = 1$, dengan rapat massa di setiap titik $\delta(x,y) = y$.

Jawab:

$$m = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} y\,dy\,dx = \frac{4}{5}.$$

$$M_y = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} xy\,dy\,dx = 0.$$

$$M_x = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} y^2\,dy\,dx = \frac{4}{7}.$$

$$x^* = 0;\ y^* = \frac{4/7}{4/5} = \frac{5}{7}.$$

Contoh/Latihan 2

Tentukan massa dan pusat massa lamina ber-bentuk seperempat cakram lingkaran berjari-jari 1 di Kuadran I, dgn rapat massa $\delta(x,y) = x^2 + y^2$.

<u>Jawab</u>:

Soal

Tentukan massa dan pusat massa lamina yang dibatatasi oleh kardioid $r = 1 + \sin\theta$, dengan rapat massa konstan. [Gambar terlebih dahulu kardioid tsb!]