MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

23 April 2014

Kuliah yang Lalu

13.1 Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

13.2 Integral Berulang

13.3 Integral Lipat Dua atas Daerah Bukan Persegi Panjang

13.4 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

13.5 Penggunaan Integral Lipat Dua

Kuliah Hari Ini

15.1 Persamaan Diferensial Linear Orde 2, Homogen

15.2 Persamaan Diferensial Linear Orde 2, Tak Homogen

15.3 Penggunaan Persamaan Diferensial Orde 2

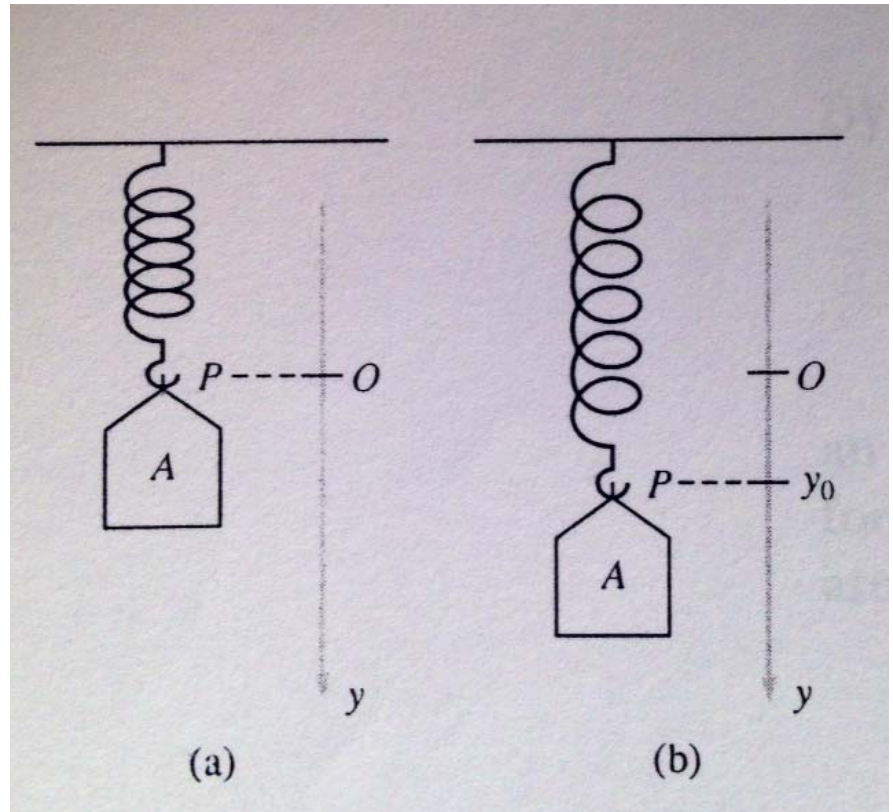
MA1201 MATEMATIKA 2A

15.1 PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE 2, HOMOGEN

Menentukan solusi umum dan solusi khusus persamaan diferensial linear orde 2 homogen

Persamaan Diferensial Orde 2

Banyak masalah dalam fisika yang dapat dirumuskan sebagai persamaan diferensial orde 2, misalnya gerak harmonik sederhana yang terjadi pada pegas bergetar/berosilasi.



Bentuk Umum Persamaan Diferensial Biasa Orde n

Misal $y = y(x)$ adalah suatu fungsi yang tidak diketahui rumusnya, namun memenuhi suatu persamaan

$$F(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

dengan $y^{(k)}$ menyatakan turunan ke-k dari y, dengan $k = 1, \ldots, n$.

Persamaan ini disebut **persamaan diferensial biasa (PDB) orde *n***.

Contoh & Solusi (Umum) PDB

1. $y' - 2 \cos x = 0$ merupakan PDB orde 1.
2. $y'' + 3xy' - 2y = 0$ merupakan PDB orde 2.
3. $y''' + (y')^2 + e^x = 0$ merupakan PDB orde 3.

Fungsi $y = f(x)$ disebut **solusi** suatu PDB apabila PDB tsb menjadi *kesamaan* ketika y dan turunan-turunannya disubstitusikan ke dalam PDB tsb.

Sebagai contoh, $y = 2 \sin x + 5$ merupakan *suatu* solusi (khusus) PDB orde 1 di atas.

Solusi umum PDB orde 1 di atas adlh $y = 2 \sin x + C$, dengan C konstanta sembarang.

PDB Linear Orde n

PDB yang berbentuk

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(1)} + a_n(x)y = k(x)$$

disebut PDB **linear** orde *n*.

Perhatikan bahwa y dan turunan-turunannya memiliki pangkat 1 semuanya.

Karena itu, PDB orde 3 pada *slide* sebelumnya bukan PDB linear, karena mengandung $(y')^2$.

PDB Linear Orde 2, dengan Koefisien Konstanta

PDB linear **orde 2** berbentuk

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=k(x).$$

Pada kesempatan ini, kita hanya akan membahas PDB linear orde 2 **dengan koefisien konstanta**, yang berbentuk:

$$y''+a_1y'+a_2y=k(x).$$

Jika $k(x) = 0$, maka PDB tsb disebut PDB **homogen**.

Solusi Umum PDB Linear Orde 2, dengan Koefisien Konstanta

Jika $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ merupakan dua solusi PDB linear orde 2 homogen

$$y''+a_1y'+a_2y=0$$

yang *saling bebas*, maka solusi umum PDB tsb adalah

$$y=C_1u_1(x)+C_2u_2(x),$$

dgn C_1 dan C_2 menyatakan konstanta sembarang. [Verifikasinya di papan tulis!]

Persamaan Karakteristik

Untuk mencari solusi PDB linear orde 2 homogen

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad [*]$$

kita misalkan $y = e^{rx}$ (mengapa?). Maka, kita per-oleh

$$(r^2 + a_1 r + a_2)e^{rx} = 0.$$

Karena $e^{rx} \neq 0$, maka mestilah

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Persamaan ini disebut **persamaan karakteristik** untuk PDB di atas.

Teorema A (Akar Real Berbeda)

Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar real berbeda, r_1 dan r_2, maka solusi umum PDB [*] adalah

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

dengan C_1 dan C_2 konstanta sembarang.

Contoh 1

Tentukan solusi umum PDB orde 2

$$y''-5y'+6y=0.$$

<u>Jawab</u>: Persamaan karakteristik PDB ini adalah

$$r^2-5r+6=0.$$

Persamaan ini mempunyai akar $r_1 = 2$ dan $r_2 = 3$.
Jadi solusi umum PDB di atas adalah

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

Contoh 1 (lanjutan)

Jika diketahui informasi tambahan, misal **syarat awal** $y(0) = 0$ dan $y'(0) = 1$, maka kita peroleh

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$2C_1 + 3C_2 = 1.$$

(Persamaan kedua diperoleh dari $y' = 2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x}$.) Dari kedua persamaan tsb, kita dapat-kan $C_1 = -1$ dan $C_2 = 1$. Jadi kita peroleh solusi khusus yang memenuhi syarat awal di atas, yaitu $y = -e^{2x} + e^{3x}$.

Teorema B (Akar Real Kembar)

Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar real kembar, $r_1 = r_2$*, maka solusi umum PDB* [*] *adalah*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x},$$

dengan C_1 *dan* C_2 *konstanta sembarang.*

Contoh 2

Tentukan solusi khusus PDB orde 2

$$y''-4y'+4y=0,$$

yg memenuhi **syarat batas** $y(0) = 0$ dan $y(1) = e^2$.

<u>Jawab</u>: Persamaan karakteristik PDB ini adalah

$$r^2-4r+4=0.$$

Persamaan ini mempunyai akar kembar $r_{1,2} = 2$.
Jadi solusi umum PDB di atas adalah

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}.$$

Contoh 2 (lanjutan)

Substitusikan kedua syarat batas, kita peroleh

$$C_1 = 0$$

$$C_1e^2 + C_2e^2 = e^2.$$

Jadi $C_1 = 0$ dan $C_2 = 1$, sehingga solusi khusus yang kita cari adalah $y = xe^{2x}$.

Teorema C (Akar Kompleks)

Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar kompleks sekawan, $r_{1,2} = a \pm bi$*, maka solusi umum PDB [*] adalah*

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx),$$

dengan C_1 *dan* C_2 *konstanta sembarang.*

Catatan: Di sini $i = \sqrt{-1}$ menyatakan *bilangan imajiner* yang memenuhi $i^2 = -1$.

Contoh 3

Tentukan solusi umum PDB orde 2

$$y''-4y'+5y=0.$$

<u>Jawab</u>: Persamaan karakteristik PDB ini adalah

$$r^2-4r+5=0.$$

Persamaan ini mempunyai akar kompleks $r_{1,2} = 2 \pm i$. Jadi solusi umum PDB di atas adalah

$$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Soal

Dengan cara serupa, kita dapat menyelesaikan PDB linear orde *n* yang homogen.

1. Tentukan solusi umum PDB orde 3

$$y''' - y'' - 20y' = 0.$$

2. Tentukan solusi umum PDB orde 4

$$y^{(4)} - y = 0.$$

MA1201 MATEMATIKA 2A

15.2 PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE 2, TAK HOMOGEN

Menentukan solusi khusus dan solusi umum persamaan diferensial linear orde 2 tak homogen

PDB Linear Orde 2, Tak Homogen

PDB linear orde 2 **tak homogen**, dengan koefisien konstanta, secara umum berbentuk

$$y''+a_1y'+a_2y=k(x),$$

dengan $k(x) \neq 0$. Jika y_p adalah solusi khusus persamaan tak homogen di atas dan y_h adalah solusi umum pers. homogen $y''+a_1y'+a_2y=0$, maka solusi umum persamaan tak homogen di atas adalah: $y = y_h + y_p$.

Bagaimana mendapatkan y_p?

Metode Koefisien Tak Tentu

Kita dapat memperoleh solusi khusus y_p dengan cara coba-coba, dengan prinsip:

1. Jika $k(x)$ polinom, maka y_p juga polinom.
2. Jika $k(x) = a.e^{cx}$, maka $y_p = Ae^{cx}$.
3. Jika $k(x) = a.\cos rx + b.\sin rx$, maka $y_p = A.\cos rx + B.\sin rx$.

<u>Catatan</u>. Bilangan A dan B merupakan koefisien yang harus dicari. Karena itu metode ini dikenal sebagai Metode Koefisien Tak Tentu.

Contoh/Latihan 1

Tentukan solusi umum dari $y''-5y'+6y=x$.

<u>Jawab</u>: Solusi persamaan homogennya adalah $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. Untuk mencari solusi khusus, misalkan $y_p = Ax + B$ (mengapa?). Maka $y_p' = A$ dan $y_p'' = 0$. Substitusikan ke PDB di atas:

$$-5A + 6(Ax + B) = x.$$

Jadi $6A = 1$ dan $-5A + 6B = 0$, sehingga $A = 1/6$ dan $B = 5/36$. Jadi solusi umum PDB di atas adl

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x/6 + 5/36.$$

Contoh/Latihan 2

Tentukan solusi umum dari $y''-4y'+4y=e^{x}$.

Jawab: Solusi persamaan homogennya adalah $y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. Untuk mencari solusi khusus, misalkan $y_p = \ldots$

Contoh/Latihan 3

Tentukan solusi umum dari $y''-5y'+6y=e^{2x}$.

Jawab: Solusi persamaan homogennya adalah $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. Untuk mencari solusi khusus, misalkan $y_p = \ldots$

Soal

Tentukan solusi umum/khusus dari

1. $y''-4y'=x;\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$
2. $y''-4y'+5y=\sin x.$
3. $y''-4y'+4y=e^{2x}.$
4. $y''-4y'+4y=e^{2x}+1.$