

MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

5 Februari 2014

Bab Sebelumnya

7. Teknik Pengintegralan

7.1 Aturan Dasar Pengintegralan

7.2 Pengintegralan Parsial

7.3 Integral Trigonometrik

7.4 Teknik Substitusi yang Merasionalkan

7.5 Integral Fungsi Rasional

7.6 Strategi Pengintegralan

MA1201 MATEMATIKA 2A

BAB 8. BENTUK TAK TENTU DAN INTEGRAL TAK WAJAR

Sasaran Kuliah Hari Ini

8.1 Bentuk Tak Tentu Tipe 0/0

Menghitung limit bentuk tak tentu 0/0 dengan menggunakan Aturan l'Hopital

8.2 Bentuk Tak Tentu Lainnya

Menghitung bentuk tak tentu tipe ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , dan 1^∞

MA1201 MATEMATIKA 2A

8.1 BENTUK TAK TENTU TIPE 0/0

Menghitung limit bentuk tak tentu 0/0 dengan menggunakan Aturan l'Hopital

Bentuk Tak Tentu Tipe 0/0

Kita masih ingat bagaimana kita berhadapan dengan limit-limit berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Ketiga limit ini mempunyai kemiripan, yaitu bahwa pembilang dan penyebutnya sama-sama menuju 0. Ketiga limit tsb merupakan limit **bentuk tak tentu tipe 0/0**.

Catatan

- Ketika kita membahas sistem bilangan real, $0/0$ tidak didefinisikan.
- Yang sedang kita bahas adalah limit “bentuk tak tentu $0/0$ ”, bukan $0/0$.
- Limit tsb disebut “bentuk tak tentu”, karena nilainya memang tak tentu (bisa ada, bisa tidak; dan walaupun ada, bisa berbeda antara satu bentuk $0/0$ dan bentuk $0/0$ lainnya).

Aturan L'Hôpital

Misalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$. *Jika*

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ada (terhingga atau tak terhingga),*

maka $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Catatan. Di sini c dapat digantikan dgn c^+ , c^- , ∞ atau $-\infty$.

Contoh/Latihan

1. Hitung $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Jawab:

Bentuk limit di atas merupakan bentuk 0/0.
Dengan Aturan L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{1} = \frac{3 \cdot 1^2}{1} = 3.$$

Catatan: (L) berarti bhw kita menggunakan Aturan L'Hopital.

2. Hitung (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Jawab:

3. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{\tan x}$.

Jawab:

4. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \sin x}$.

Jawab:

5. Hitung $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{x^2 - 1}$.

Jawab:

Bahan Diskusi

Perhatikan bentuk limit berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan x}.$$

- Apakah limit ini merupakan bentuk 0/0?
- Apakah Aturan L'Hopital dapat diterapkan?
- Hitunglah nilai limit tsb (terserah dengan cara apa).

MA1201 MATEMATIKA 2A

8.2 BENTUK TAK TENTU LAINNYA

Menghitung bentuk tak tentu tipe ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , dan 1^∞

Bentuk Tak Tentu Tipe ∞/∞

Selain bentuk tipe $0/0$, limit berbentuk seperti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

juga sering kita hadapi. Dalam bentuk ini, baik pembilang maupun penyebut sama-sama menuju tak hingga. Bentuk seperti merupakan bentuk tak tentu juga, yang kita sebut sebagai **bentuk tak tentu tipe ∞/∞** .

Aturan L'Hôpital utk Bentuk ∞/∞

Misalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$. *Jika*

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ada (terhingga atau tak terhingga),*

maka $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Catatan. Di sini c dapat digantikan dgn c^+ , c^- , ∞ atau $-\infty$.

Contoh/Latihan

1. Hitung $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x}$.

Jawab:

Bentuk limit di atas merupakan bentuk ∞/∞ .
Dengan Aturan L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Catatan: Seperti biasa, (L) berarti bahwa kita menggunakan Aturan L'Hopital.

2. Hitung $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Jawab:

Bentuk $0 \cdot \infty$

3. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

Jawab: Di sini $x \rightarrow 0^+$ dan $\ln x \rightarrow -\infty$ bila $x \rightarrow 0^+$.

Untuk menghitung limit ini, kita tuliskan

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}.$$

Perhatikan bahwa bentuk di ruas kanan merupakan bentuk ∞/∞ . Karena itu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

4. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x$.

Jawab:

Bentuk $\infty - \infty$

5. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Jawab: Kita ubah terlebih dahulu bentuk di atas ke bentuk $0/0$ atau ∞/∞ .

6. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$. [*Wow, bentuk apakah ini?*]

Jawab:

7. Hitung $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. [*Eh, bentuk apa lagi ini?*]

Jawab:

8. Hitung $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$. [*Bentuk apa pula ini?*]
Jawab:

Bahan Diskusi

Perhatikan bentuk limit berikut:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\cos x}.$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}.$$

- Apakah mereka merupakan bentuk tak tentu?
- Hitunglah nilai masing-masing limit tersebut (terserah dengan cara apa).