

MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

7 Februari 2014

Kuliah yang Lalu

8.1 Bentuk Tak Tentu Tipe 0/0

Menghitung limit bentuk tak tentu 0/0 dengan menggunakan Aturan l'Hopital

8.2 Bentuk Tak Tentu Lainnya

Menghitung bentuk tak tentu tipe ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , dan 1^∞

Sasaran Kuliah Hari Ini

8.3 Integral Tak Wajar dgn Batas Tak Terhingga

Mengenali dan menghitung integral tak wajar dengan batas tak terhingga

8.4 Integral Tak Wajar dgn Integran Tak Terbatas

Mengenali dan menghitung integral tak wajar dengan integran tak terbatas

MA1201 MATEMATIKA 2A

8.3 INTEGRAL TAK WAJAR DENGAN BATAS TAK TERHINGGA

Mengenali dan menghitung integral tak wajar dengan batas tak terhingga

Integral Tak Wajar

Dalam definisi integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ terdapat dua asumsi:

- (i) selang pengintegralannya, yaitu $[a,b]$, merupakan selang terhingga;
- (ii) fungsi integrannya (yang diintegrasikan) merupakan fungsi terbatas.

Namun, dalam aplikasinya, ada kalanya salah satu atau kedua asumsi ini tidak dipenuhi.

Dalam hal demikian kita berhadapan dengan **integral tak wajar**.

Integral Tak Wajar dengan Batas Tak Terhingga

Pada sub-bab ini kita akan membahas terlebih dahulu integral tak wajar dengan **batas tak terhingga**, misalnya integral berikut ini:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{-1} x e^{-x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^3} dx.$$

Kita akan mulai dengan bentuk yang pertama terlebih dahulu.

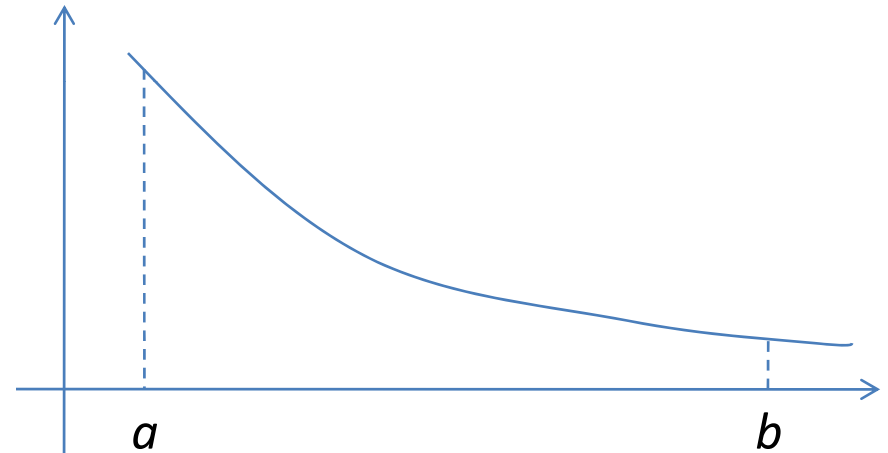
Bagaimana Menghitung $\int_a^{\infty} f(x)dx$

Untuk setiap $b > a$, kita dapat menghitung integral tentu

$$\int_a^b f(x)dx.$$

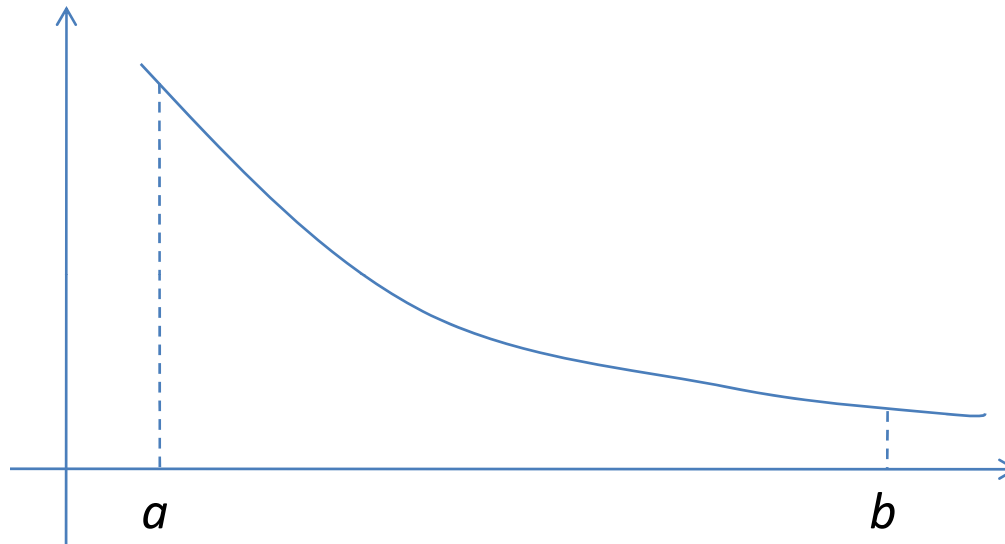
Integral tak wajar

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$



dapat didefinisikan sebagai limit dari integral tentu di atas, untuk $b \rightarrow \infty$.

Definisi Integral Tak Wajar $\int_a^{\infty} f(x)dx$



$$\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx, \quad \text{bila limit ini ada.}$$

Catatan. Bila limit tsb ada, integral dikatakan **konvergen**; bila tidak, integral **divergen**.

Contoh/Latihan

1. Hitung $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$, bila konvergen.

Jawab:

Untuk setiap $b > 0$, kita hitung

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \Big|_0^b = \tan^{-1} b - \tan^{-1} 0 = \tan^{-1} b.$$

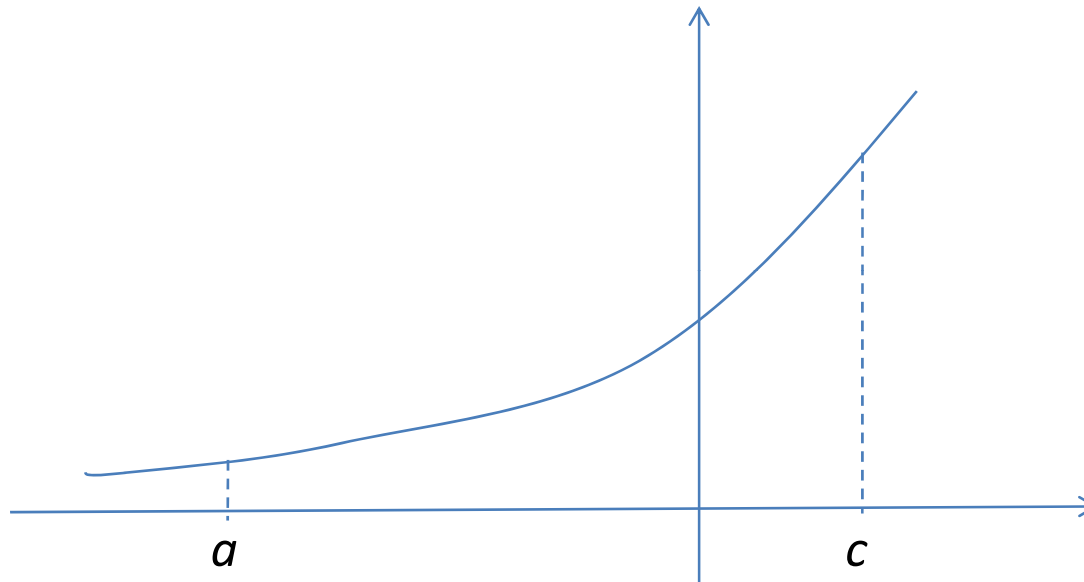
Jadi

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1} b = \frac{\pi}{2}.$$

2. Hitung $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

Jawab:

Definisi Integral Tak Wajar $\int_{-\infty}^c f(x)dx$



$$\int_{-\infty}^c f(x)dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx, \text{ bila limit ini ada.}$$

Catatan. Bila limit tsb ada, integral dikatakan **konvergen**; bila tidak, integral **divergen**.

3. Hitung $\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2} dx$

Jawab:

Definisi Integral Tak Wajar $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx,$$

bila kedua integral di ruas kanan konvergen.

4. Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$, bila konvergen.
Jawab:

5. Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$, bila konvergen.
Jawab:

Meluncurkan Roket ke Angkasa

Menurut Hukum Newton, gaya gravitasi yang dialami oleh roket berbanding terbalik dgn jarak kuadrat, yakni $-k/x^2$, dengan x = jarak dari pusat Bumi. Karena itu, gaya yang diperlukan utk mengangkat roket tsb adalah $F(x) = k/x^2$. Berapakah kerja yang diperlukan untuk meluncurkan roket dgn berat 500 N ke luar angkasa?

Bahan Diskusi

Untuk nilai p berapakah integral tak wajar ini

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

konvergen?

MA1201 MATEMATIKA 2A

8.4 INTEGRAL TAK WAJAR DENGAN INTEGRAN TAK TERBATAS

Mengenali dan menghitung integral tak wajar dengan integran tak terbatas

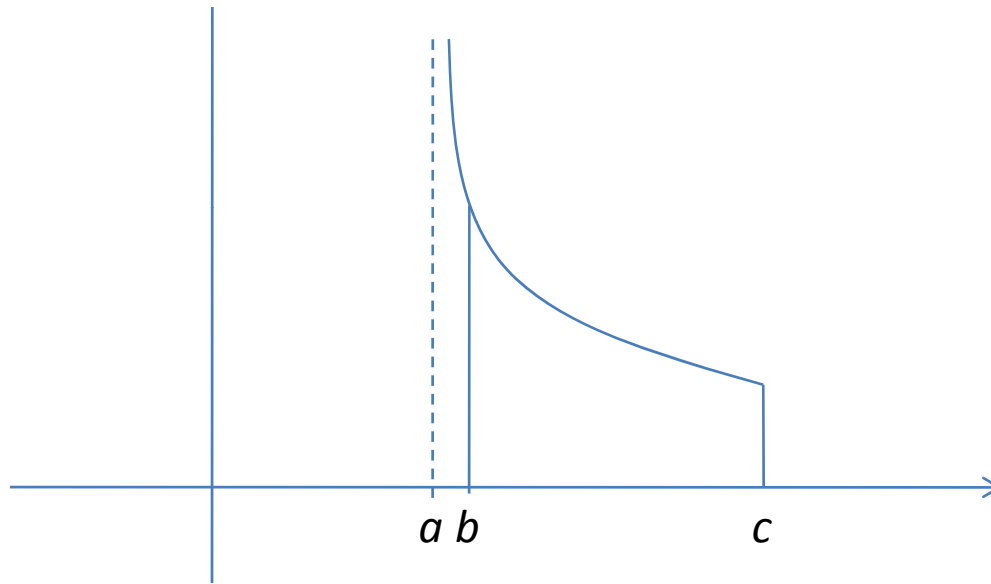
Integral Tak Wajar dengan Integran Tak Terbatas

Sekarang kita akan membahas integral tak wajar dengan **integran tak terbatas**, misalnya integral berikut ini:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \tan x \cdot dx, \quad \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx.$$

Pada integral pertama, integran tak terbatas di ujung kiri; sedangkan pada integral kedua, integran tak terbatas di ujung kanan. *Apa yang membuat integral ketiga tak wajar?*

Definisi Integral Tak Wajar $\int_a^c f(x)dx$
dengan f tak terbatas di a



$$\int_a^c f(x)dx := \lim_{b \rightarrow a^+} \int_b^c f(x)dx, \text{ bila limit ini ada.}$$

Contoh/Latihan

1. Hitung $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, bila konvergen.

Jawab:

Untuk setiap $b > 0$, dengan $b < 1$, kita hitung

$$\int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_b^1 = 2 - 2\sqrt{b}.$$

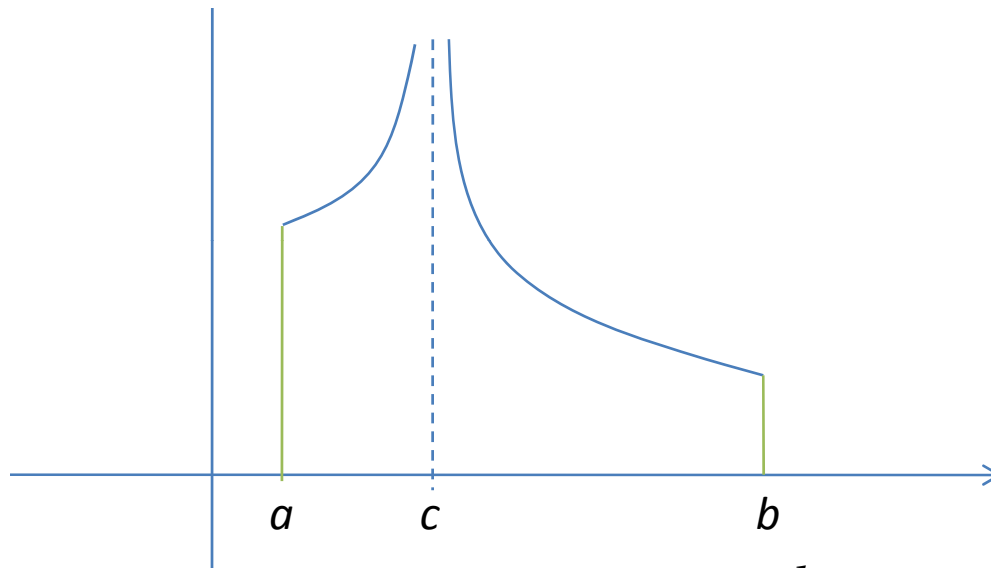
Jadi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{b}) = 2.$$

2. Hitung $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$, bila konvergen.
Jawab:

3. Hitung $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x \ln x}$, bila konvergen.
Jawab:

Definisi Integral Tak Wajar $\int_a^b f(x)dx$ dgn
 f tak terbatas di $c \in (a,b)$



$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

bila kedua integral di ruas kanan konvergen.

Contoh/Latihan

4. Hitung $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$, bila konvergen.
Jawab:

Integran tak terbatas di $x = 1$. Kita hitung dahulu:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \rightarrow 1^-} 3(x-1)^{1/3} \Big|_0^c = 3.$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \rightarrow 1^+} 3(x-1)^{1/3} \Big|_c^2 = 3.$$

Jadi: $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3 = 6.$

5. Hitung $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^2} dx$.

Jawab:

Bahan Diskusi

Untuk nilai p berapakah integral tak wajar ini

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

konvergen?

Apakah ada bilangan p yang membuat integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

konvergen? [*Oops.. Integral tak wajar jenis apa pula ini?*]