MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

12 Februari 2014

Bab Sebelumnya

8. Bentuk Tak Tentu dan Integral Tak Wajar

8.1 Bentuk Tak Tentu 0/0

8.2 Bentuk Tak Tentu Lainnya

8.3 Integral Tak Wajar dgn Batas Tak Terhingga

8.4 Integral Tak Wajar dgn Integran Tak Terbatas

MA1201 MATEMATIKA 2A

BAB 9. DERET TAK TERHINGGA

Sasaran Kuliah Hari Ini

9.1 Barisan Tak Terhingga

Memeriksa kekonvergenan suatu barisan dan, bila mungkin, menghitung limitnya

9.2 Deret Tak Terhingga

Memeriksa kekonvergenan suatu deret dan, bila mungkin, menghitung jumlahnya

MA1201 MATEMATIKA 2A

9.1 BARISAN TAK TERHINGGA

Memeriksa kekonvergenan suatu barisan dan, bila mungkin, menghitung limitnya

Mengapa Barisan Tak Terhingga

Masih ingatkah dgn **Metode Bagi Dua** untuk mendapatkan hampiran akar dari suatu persamaan $f(x) = 0$ pada suatu selang?

Pada setiap langkah, kita membagi dua selang dan menaksir akar persamaan itu dengan titik tengah selang tersebut.

Dengan metode ini, kita dapatkan barisan titik-titik tengah selang x_1, x_2, x_3, … yang merupakan hampiran akar persamaan.

Apa itu Barisan Tak Terhingga

Barisan tak terhingga, atau singkatnya **barisan**, dari bilangan real, adalah suatu fungsi dengan daerah asal **N** dan daerah nilai **R**, yang biasanya disajikan sebagai $\{a_n\}$ atau

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

dengan $a_n \in \mathbf{R}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Contoh 1: Barisan $\{2n - 1\}$ adalah barisan bilangan ganjil 1, 3, 5, 7, ...

Contoh Lagi

2. Barisan $\{(-1)^n\}$ adalah barisan bilangan -1, 1, -1, 1, -1, 1, …

   Catatan: Bedakan antara barisan $\{(-1)^n\}$ dan himpunan $\{(-1)^n : n \in \mathbf{N}\} = \{-1, 1\}$.

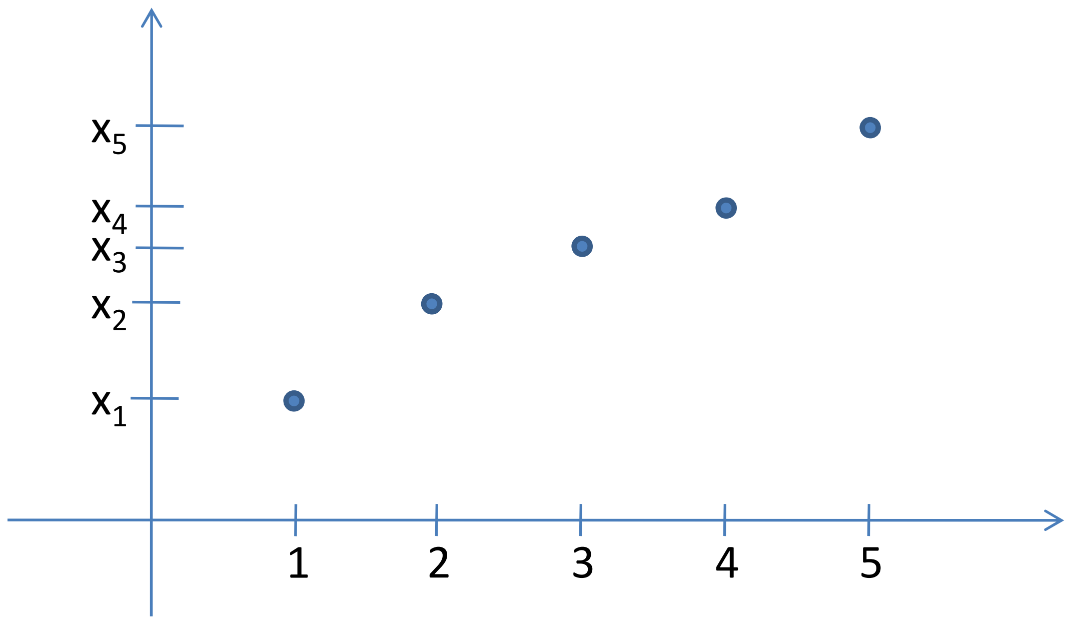
3. Barisan $\{a_n\}$ yang didefinisikan dengan **rumus rekursif**: $a_1 = 1$ dan

   $$a_{n+1} = 0.5(a_n + 2), \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \ldots$$

   adalah barisan bilangan 1, 1.5, 1.75, …

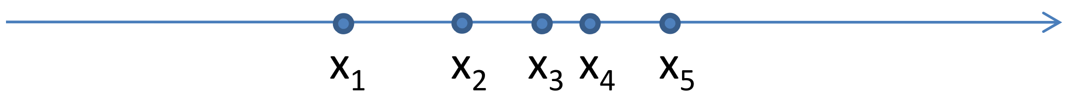
"Grafik" Barisan (1)

Barisan dapat kita plot pada bidang koordinat

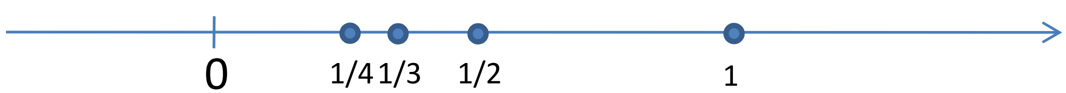


"Grafik" Barisan (2)

Barisan dapat kita plot pada garis bilangan real



Contoh: $\{1/n\}$



Kekonvergenan Barisan

Diberikan suatu barisan $\{a_n\}$, apa yang terjadi bila $n \rightarrow \infty$?

Definisi: Barisan $\{a_n\}$ dikatakan **konvergen** ke suatu bilangan L, ditulis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,$$

apabila untuk tiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Catatan. Tidak semua barisan konvergen. Barisan yang tidak konvergen disebut **divergen**.

Contoh:

1. Barisan $\{1/n\}$ konvergen ke 0, yakni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Untuk tiap $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $N > 1/\varepsilon$ sehingga jika $n \geq N$, maka

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

2. Barisan $\{(-1)^n\}$ merupakan barisan yang divergen, yakni: untuk tiap $L \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq L.$$

Sebagai contoh, untuk $L = 1$, ada $\varepsilon = 1$ sehingga berapapun $N \in \mathbf{N}$ yang kita pilih, selalu ada bilangan ganjil $n \geq N$ sehingga

$$\left|(-1)^n - 1\right| = 2 > \varepsilon.$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 1.$$

9.1b Beberapa Teorema Bantuan untuk Memeriksa Kekonvergenan Barisan dan Menghitung Limitnya

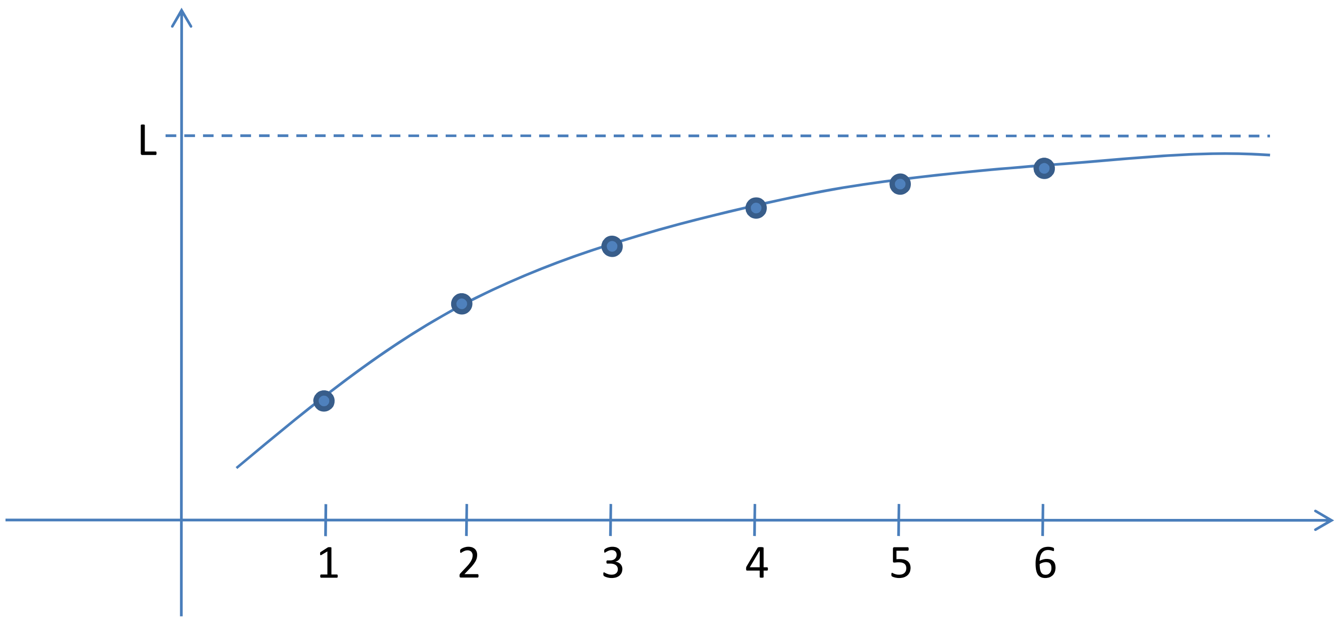
Teorema Limit Barisan

Misalkan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ barisan yang konvergen, dan k konstanta. Maka

1. $\lim_{n\to\infty} k = k$
2. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, asalkan \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$

Teorema Limit Barisan

Jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, *maka* $\lim_{n\to\infty} f(n) = L.$



Contoh:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2+3/n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 2+3\cdot\lim\limits_{n\to\infty} 1/n} = \frac{1}{2+3\cdot 0} = \frac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+2}{n^3+3n-1} = \ldots$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = \ldots$

Teorema Apit untuk Barisan

Jika $a_n \le b_n \le c_n$ *untuk* $n \ge K$ ($K \in \mathbf{N}$ *tertentu*) *dan*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L, \text{ maka } \lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Contoh: 1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0, karena -\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$

dan $\pm \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

2. Jika $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0, maka \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ karena

$-|a_n| \le a_n \le |a_n| \qquad \forall n \in$ **N**.

Barisan Monoton

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan **naik** apabila $a_n \le a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan **turun** apabila $a_n \ge a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Barisan naik atau turun disebut barisan **monoton**.

Contoh: $\{1/n\}$ turun, sedangkan $\{2^n\}$ naik.

Teorema Barisan Monoton

Jika barisan $\{a_n\}$ *naik dan* **terbatas di atas***, yakni terdapat* $M \in$ **R** *sehingga* $a_n \leq M$ *untuk tiap* $n \in$ **N***, maka* $\{a_n\}$ *konvergen*.

Jika barisan $\{a_n\}$ *turun dan* **terbatas di bawah***, yakni terdapat* $m \in$ **R** *sehingga apabila* $m \leq a_n$ *untuk tiap* $n \in$ **N***, maka* $\{a_n\}$ *konvergen*.

Contoh/Latihan

Barisan $\{a_n\}$ yang didefinisikan dengan **rumus rekursif**: $a_1 = 1$ dan

$$a_{n+1} = 0.5(a_n + 2), \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \ldots$$

adalah barisan bilangan 1, 1.5, 1.75, … . Buktikan bahwa barisan ini naik dan terbatas di atas.

Jelas bahwa $a_2 = 1.5 > 1 = a_1$. Selanjutnya misalkan $a_{k+1} \geq a_k$. Maka, $a_{k+2} = 0.5(a_{k+1} + 2) \geq 0.5(a_k + 2) = a_{k+1}$.
Jadi, berdasarkan Prinsip Induksi Matematika*, $a_{n+1} \geq a_n$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$, yakni $\{a_n\}$ naik.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\{a_n\}$ terbatas di atas, persisnya bahwa $a_n \le 2$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$, juga dengan Prinsip Induksi Matematika.

Jelas bahwa $a_1 \le 2$. Selanjutnya misalkan $a_k \le 2$.

Maka, $a_{k+1} = 0.5(a_k + 2) \le 0.5(2 + 2) = 2$. Jadi, berdasarkan Prinsip Induksi Matematika, kita simpulkan bahwa $a_n \le 2$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$.

Dengan demikian $\{a_n\}$ naik dan terbatas di atas, sehingga menurut Teorema Barisan Monoton, $\{a_n\}$ konvergen.

*Prinsip Induksi Matematika

Misalkan P(n) adalah pernyataan atau kalimat matematika yang berkenaan dengan $n \in \mathbf{N}$. [Sebagai contoh, P(n) adalah kalimat “$n < 2n$”.]

Jika

(i) P(1) benar, dan

(ii) P(k) benar mengakibatkan P(k+1) benar,

maka

P(n) benar untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Bahan Diskusi

Ke manakah barisan $\{a_n\}$ tadi konvergen?

Buktikan!