MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

14 Februari 2014

Sasaran Kuliah Hari Ini

9.1 Barisan Tak Terhingga

Memeriksa kekonvergenan suatu barisan dan, bila mungkin, menghitung limitnya

9.2 Deret Tak Terhingga

Memeriksa kekonvergenan suatu deret dan, bila mungkin, menghitung jumlahnya

9.3 Deret Positif: Uji Integral

Memeriksa kekonvergenan deret positif dengan uji jumlah terbatas dan uji integral

MA1201 MATEMATIKA 2A

9.2 DERET TAK TERHINGGA

Memeriksa kekonvergenan suatu deret dan, bila mungkin, menghitung jumlahnya

Mengapa Deret Tak Terhingga

Dengan turunan pertama, kita mendapatkan hampiran

$$\sin x \approx x, \qquad untuk\ x \approx 0.$$

Bila kita gunakan turunan kedua dan ketiga, kita akan dapatkan hampiran yang lebih baik

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad untuk\ x \approx 0.$$

Kelak kita dapat menunjukkan bahwa

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \ldots, \quad untuk\ x \in \Re.$$

Mengapa Deret Tak Terhingga

Pertanyaannya adalah: apa arti penjumlahan

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \ldots$$

dan bagaimana mengetahui jumlah tsb ada?

Secara umum, bila $a_n \in \mathbf{R}$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$, apa arti penjumlahan

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$$

dan bagaimana menghitungnya?

Deret Tak Terhingga

Bentuk penjumlahan

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$$

disebut sebagai **deret tak terhingga** atau singkatnya **deret**, dan dapat dituliskan dalam notasi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Bagaimana Memaknai Deret

Diberikan suatu deret

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$$

Kkita dapat menghitung **jumlah parsial**-nya:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\ldots$$
$$S_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$$
$$\ldots$$

Dalam hal ini kita peroleh barisan $\{S_N\}$.

Bagaimana Memaknai Deret

Jika $\{S_N\}$ konvergen ke S, maka deret tersebut dikatakan **konvergen** (ke S) dan kita definisikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \lim_{N \to \infty} S_N = S.$$

Bilangan S disebut sebagai **jumlah** deret tsb.

Deret Geometri

Deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, dengan $a \neq 0$ dan $r \neq 1$,

mempunyai jumlah parsial

$$S_N = \frac{a(1-r^N)}{1-r}.$$

Jika $|r| < 1$, maka $\lim_{N\to\infty} r^N = 0$, dan dalam hal ini

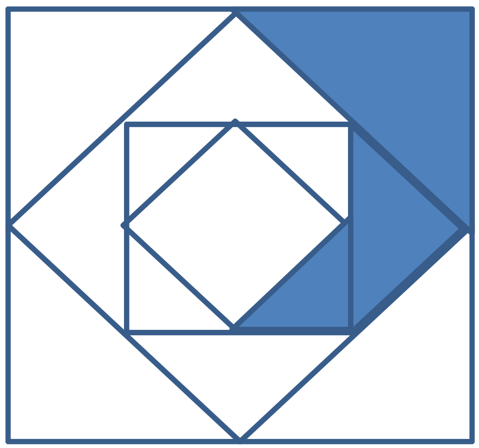
$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{a}{1-r}$. Jika $|r| > -1$ atau $r = -1$, $\{S_N\}$ div.

Contoh

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ merupakan deret geometri dengan suku pertama *a* = ½ dan rasio *r* = ½. Jadi deret ini konvergen dan jumlahnya adalah *S* = 1.

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ merupakan deret geometri dengan suku pertama *a* = -1 dan rasio *r* = -1. Jadi deret ini divergen.

Soal: Berapa Luasnya?



…. dst.

Uji Suku ke-n untuk Kedivergenan

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Contoh. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergen karena $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0.$

Catatan. Hati-hati! Walau $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ belum tentu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

Deret Harmonik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Di sini $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$ Tapi deret ini divergen, karena:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Deret Kolaps (Berjatuhan)

Deret $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ konvergen, karena

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1 \quad \mathit{bila} \quad n\to\infty.$$

Teorema Kelinearan Deret

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, dan *c* konstanta,

maka

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$

Catatan

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen dan $c \neq 0$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ divergen.

Sebagai contoh, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n}$ divergen karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.

MA1201 MATEMATIKA 2A

9.3 DERET POSITIF: UJI INTEGRAL

Memeriksa kekonvergenan deret positif dengan uji jumlah terbatas dan uji integral

Deret Positif

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut **deret positif** apabila $a_n \geq 0$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$. Pada bagian ini, kita hanya akan membahas deret positif.

Teorema (Uji Jumlah Terbatas). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika dan hanya jika jumlah parsialnya terbatas.

Contoh/Latihan

Buktikan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergen.

Petunjuk. Periksa keterbatasan jumlah parsial S_n.

Uji Integral

Misalkan f fungsi yang kontinu, tak negatif, dan tak naik pada $[1,\infty)$, dan $a_n = f(n)$. Maka deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergen jika dan hanya jika integral tak wajar

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

konvergen.

Contoh

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, karena integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ konvergen.

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen jika dan hanya jika $p > 1$.

[Hasil ini menjustifikasi bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.]

Latihan

1. Selidiki apakah deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ konvergen atau divergen.

2. Selidiki pula apakah deret $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)}$ konvergen atau divergen.