MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

19 Februari 2014

Kuliah yang Lalu

9.2 Deret Tak Terhingga

Memeriksa kekonvergenan suatu deret dan, bila mungkin, menghitung jumlahnya

9.3 Deret Positif: Uji Integral

Memeriksa kekonvergenan deret positif dengan uji jumlah terbatas dan uji integral

Sasaran Kuliah Hari Ini

9.4 Deret Positif: Uji Lainnya

Memeriksa kekonvergenan deret positif dengan uji perbandingan dan uji rasio

9.5 Deret Ganti Tanda: Kekonvergenan Mutlak dan Kekonvergenan Bersyarat

Memeriksa kekonvergenan mutlak/bersyarat deret ganti tanda

MA1201 MATEMATIKA 2A

9.4 DERET POSITIF: UJI LAINNYA

Memeriksa kekonvergenan deret positif dengan uji perbandingan dan uji rasio

Mengapa Perlu Uji Lainnya

Kita telah mempunyai beberapa ‘senjata’ utk menyelidiki kekonvergenan deret, ada: definisi, sifat deret geometri, teorema kelinearan deret, uji suku ke-*n*, uji jumlah terbatas, dan uji integral (termasuk uji deret-*p*). Namun, kita masih kesulitan menghadapi deret seperti

$$\sum \frac{1}{1+n^4} \quad \text{dan} \quad \sum \frac{2^n}{n!}.$$

Catatan. Di sini kita masih membahas deret positif.

Uji Perbandingan

Misalkan $0 \le a_n \le b_n$ *utk* $n \ge K$ (*utk suatu* $K \in \mathbf{N}$).

(i) Jika $\sum b_n$ *konvergen, maka* $\sum a_n$ *konvergen*.

(ii) Jika $\sum a_n$ *divergen, maka* $\sum b_n$ *divergen*.

<u>Catatan</u>. Kedua pernyataan di atas ekuivalen.

Contoh

Deret $\sum \frac{1}{1+n^4}$ konvergen karena $\frac{1}{1+n^4} \leq \frac{1}{n^4}$

untuk tiap $n \in \mathbf{N}$ dan $\sum \frac{1}{n^4}$ konvergen.

Uji Perbandingan Limit

Misalkan $a_n \geq 0$ *dan* $b_n > 0$ *dan* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

(i) Jika $0 < L < \infty$, *maka* $\sum a_n$ *dan* $\sum b_n$ *sama-sama konvergen atau divergen*.

(ii) Jika $L = 0$ *dan* $\sum b_n$ *konvergen, maka* $\sum a_n$ *konvergen*.

Contoh

Deret $\sum \frac{1}{1+n}$ divergen karena $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} \div \frac{1}{n} = 1$

dan $\sum \frac{1}{n}$ divergen.

Soal

Selidiki kekonvergenan deret $\sum \frac{\ln n}{n^2}$.

Uji Rasio

Misalkan $\sum a_n$ *deret dengan* $a_n > 0$ *dan*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

(i) Jika $\rho < 1$*, maka deret konvergen*.

(ii) Jika $\rho > 1$*, maka deret divergen*.

(iii) Jika $\rho = 1$*, maka uji ini tidak memberikan kesimpulan apapun*.

<u>Catatan</u>. Pada deret geometri, rasionya konstan.

Contoh

Selidiki kekonvergenan deret $\sum \frac{2^n}{n!}$.

<u>Jawab</u>: Kita hitung

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Menurut Uji Rasio, deret $\sum \frac{2^n}{n!}$ konvergen.

Soal

Selidiki kekonvergenan deret berikut:

1. $\sum \frac{\ln n}{n}$.

2. $\sum \frac{n^n}{n!}$.

MA1201 MATEMATIKA 2A

9.5 DERET GANTI TANDA

Memeriksa kekonvergenan mutlak/
bersyarat deret ganti tanda

Apa itu Deret Ganti Tanda

Kita telah mempelajari deret positif (dan deret negatif). Sekarang kita tinjau **deret ganti tanda**, yaitu deret berbentuk

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

dengan $a_n > 0$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$. Sebagai contoh, kita akan menyelidiki kekonvergenan **deret harmonik ganti tanda**

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

Kekonvergenan Deret Ganti Tanda

Diketahui deret ganti tanda

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

Kita hitung jumlah parsialnya

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 - a_2 = S_1 - a_2$$

$$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

$$S_4 = \dots = S_3 - a_4$$

$$dst.$$

Kita perhatikan pula bahwa S_1, S_3, S_5, ... turun dan terbatas di bawah, sehingga konvergen, katakan ke S^*. Sementara itu, S_2, S_4, S_6, ... naik dan terbatas di atas, sehingga konvergen, katakan ke S^{**}. Baik S^* maupun S^{**} berada di antara S_n dan S_{n+1} (ilustrasi di papan tulis).

Jadi, $\quad |S^* - S^{**}| \le |S_n - S_{n+1}| = a_{n+1}$.

Jadi, jika $\lim_{n\to 0} a_n = 0$, maka $S^* = S^{**}$, sehingga deret konvergen ke bilangan yang sama, sebut-lah S. Dapat pula diperiksa bahwa

$$|S - S_n| \le |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}.$$

Uji Deret Ganti Tanda

Diketahui deret ganti tanda

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

dengan $a_n > a_{n+1} > 0$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$.

Dari pengamatan sebelumnya, kita simpulkan:

Jika $\lim\limits_{n\to 0} a_n = 0$, *maka deret konvergen*.

Lebih jauh, jika jumlahnya ditaksir dengan S_n, *maka kesalahannya tak lebih daripada* a_{n+1}.

Contoh

Deret $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ merupakan deret ganti tanda dengan $a_n = 1/n$ turun dan menuju 0.

Jadi, deret ganti tanda ini konvergen.

Bila kita ingin menaksir jumlahnya dengan kesalahan tak lebih daripada 0.01, maka kita harus menaksirnya dengan S_{99}, yaitu

$$S_{99}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{98}+\frac{1}{99}.$$

Kekonvergenan Mutlak

Teorema. *Diketahui deret* $\sum u_n$ *sembarang*.

Jika $\sum |u_n|$ *konvergen, maka* $\sum u_n$ *konvergen*.

Catatan. Deret $\sum u_n$ dikatakan **konvergen mutlak** apabila $\sum |u_n|$ konvergen.

Kebalikan teorema di atas tidak berlaku: kekonvergenan $\sum u_n$ tidak menjamin kekonvergenan $\sum |u_n|$.

Contoh

Deret $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$ konvergen mutlak, karena deret

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

konvergen.

Kekonvergenan Bersyarat

Deret harmonik ganti tanda $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ konvergen, tetapi tidak konvergen mutlak.

Deret $\sum u_n$ yang konvergen tetapi $\sum |u_n|$ tidak konvergen dikatakan **konvergen bersyarat**.

Sebagai contoh, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ merupakan deret yang konvergen bersyarat.

Uji Rasio Mutlak

Misalkan $\sum u_n$ *deret sembarang dengan suku-suku tak nol, dan*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho.$$

(i) Jika $\rho < 1$, *maka deret konvergen mutlak*.

(ii) Jika $\rho > 1$, *maka deret divergen*.

(iii) Jika $\rho = 1$, *maka uji ini tidak memberikan kesimpulan apapun*.

Latihan

Selidiki kekonvergenan deret dan, dalam hal konvergen, tentukan apakah ia konvergen mutlak atau bersyarat.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$