MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

26 Februari 2014

Kuliah yang Lalu

9.6 Deret Pangkat

Menentukan selang kekonvergenan deret pangkat

9.7 Operasi pada Deret Pangkat

Melakukan operasi pada deret pangkat (yang diketahui jumlahnya) untuk mendapatkan deret pangkat lainnya (dan jumlahnya)

Sasaran Kuliah Hari Ini

9.8 Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Menentukan deret Taylor dan deret Maclaurin dari suatu fungsi di sekitar titik yg ditentukan

9.9 Hampiran Taylor terhadap Fungsi

Menentukan hampiran Taylor terhadap suatu fungsi di sekitar titik yang ditentukan, beserta taksiran kesalahannya

MA1201 MATEMATIKA 2A

9.8 DERET TAYLOR DAN DERET MACLAURIN

Menentukan deret Taylor dan deret Maclaurin dari suatu fungsi di sekitar titik yang ditentukan

Ingat Mengapa Deret Tak Terhingga

Dengan turunan pertama, kita mendapatkan hampiran

$$\sin x \approx x, \qquad untuk\ x \approx 0.$$

Bila kita gunakan turunan kedua dan ketiga, kita akan dapatkan hampiran yang lebih baik

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad untuk\ x \approx 0.$$

Kelak kita dapat menunjukkan bahwa

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \ldots, \quad untuk\ x \in \Re.$$

Pada Kuliah yang Lalu…

Kita telah membahas bahwa deret pangkat

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

konvergen untuk seluruh bilangan real x, dan $S(x)$ memenuhi persamaan diferensial orde 2:

$$S''(x) = -S(x),$$

dengan $S(0) = 0$ dan $S'(0) = 1$. Solusi persamaan diferensial ini adalah $S(x) = \sin x$.

Sejauh Ini…

Diberikan suatu deret pangkat, kita dapat menentukan selang kekonvergenannya.

Untuk deret geometri, serta turunan dan integralnya, kita bisa mendapatkan jumlahnya.

Demikian juga utk beberapa deret pangkat yang jumlahnya sama dengan e^x, $\cos x$, dan $\sin x$.

Lalu, dengan operasi pada deret pangkat, kita dapat memperoleh uraian deret pangkat dari fungsi seperti $f(x) = xe^x$ dan $g(x) = e^x/(1 - x)$.

Pertanyaan Baru

Diberikan suatu fungsi $f(x)$, dapatkah kita meng-uraikannya sebagai sebuah deret pangkat

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots$$

untuk x di sekitar a?

Dengan perkataan lain, apakah kita dapat mencari c_0, c_1, c_2, … sehingga deret pangkat di atas konvergen ke $f(x)$ untuk x di sekitar $x = a$.

Misalkan *f* dapat diuraikan sebagai deret pangkat di sekitar *x* = *a*

Maka, c_0 mestilah sama dengan nilai $f(a)$.

Selanjutnya, jika kita turunkan *f* terhadap *x*

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots$$

maka c_1 mestilah sama dengan nilai $f'(a)$.

Turunkan lagi terhadap *x*:

$$f''(x) = 2!c_2 + 3!c_3(x-a) + 4\cdot 3(x-a)^2 + \ldots$$

maka c_2 mestilah sama dengan ½ $f''(a)$.

Dan seterusnya…

Jadi…

Jika f dapat diuraikan sebagai deret pangkat

(1) $$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots$$

maka f mempunyai turunan setiap orde dan

(2) $$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

dengan $f^{(0)}(a) = f(a)$ dan $0! = 1$.

Tetapi… bagaimana sebaliknya? Jika $f^{(n)}(a)$ ada untuk tiap n, dan c_n kita hitung dgn rumus (2), apakah jumlah deret pangkat (1) sama dgn $f(x)$?

Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Uraian deret pangkat dari *f* di sekitar *x* = *a* disebut **deret Taylor** untuk *f* di *a*, yakni:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

Jika *a* = 0, maka deret pangkat tsb disebut **deret Maclaurin** untuk *f*, yakni:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Polinom dan Suku Sisa Taylor

Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan ke-(n+1) pada selang terbuka I yang memuat a. Maka, untuk setiap $x \in I$, berlaku $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ dengan

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots. + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

dan suku sisa

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

untuk suatu c di antara x dan a.

Teorema Taylor

Misalkan *f* fungsi yang mempunyai turunan tiap orde pada selang *I = (a – r, a + r)*. Maka, untuk setiap *x* ∊ *I*, berlaku

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

Jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0,$$

dengan *c* di antara *x* dan *a*.

Contoh 1

Tentukan deret Maclaurin untuk sin x dan periksa bahwa deret tsb merepresentasikan sin x untuk setiap $x \in \mathbf{R}$.

Jawab:

Contoh 2

Tentukan deret Maclaurin untuk sinh x dan periksa bahwa deret tsb merepresentasikan sinh x untuk setiap $x \in \mathbf{R}$.

Jawab:

Beberapa Deret Maclaurin Penting

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$

2. $\ln(1-x) =$

3. $\tan^{-1} x =$

4. $e^x =$

Beberapa Deret Maclaurin Penting

5. $\sin x =$

6. $\cos x =$

7. $\sinh x =$

8. $\cosh x =$

Latihan

Tentukan deret Maclaurin untuk

1. $f(x) = (1 + x)^{1/2}$, untuk $-1 < x < 1$.

2. $g(x) = \tan x$, untuk $-\pi/2 < x < \pi/2$.

MA1201 MATEMATIKA 2A

9.9 HAMPIRAN TAYLOR TERHADAP FUNGSI

Menentukan hampiran Taylor terhadap suatu fungsi di sekitar titik yang ditentu- kan, beserta taksiran kesalahannya

Diferensial & Aproksimasi Berlanjut

Dengan turunan pertama, kita dapat meng-hampiri fungsi *f* di sekitar *x* = *a* :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) = P_1(x).$$

Polinom di ruas kanan tidak lain merupakan **polinom Taylor orde 1** dari *f* di *a*.

Bila *f* mempunyai turunan kedua di sekitar *x* = *a*, maka **kesalahan** penghampiran di atas adalah

$$R_1(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2,$$

dgn *c* di antara *x* dan *a*.

Hampiran Taylor Orde *n*

Jika *f* mempunyai turunan ke-(*n*+1), maka kita dapat menghampiri fungsi *f* di sekitar *x* = *a* dengan **polinom Taylor orde *n***:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = P_n(x).$$

dengan **kesalahan** penghampiran

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

dgn *c* di antara *x* dan *a*.

Contoh 1

Tentukan polinom Maclaurin orde 4 dari $f(x) = \cos x$. Gunakan polinom ini untuk menghampiri nilai cos 0.1. Taksirlah kesalahan maksimumnya.

<u>Jawab</u>:

Contoh 2

Taksirlah nilai $e^{0.1}$ dengan kesalahan tak lebih daripada 0.01.

<u>Jawab</u>:

Bahan Diskusi

Diketahui $f(x) = x^4$. Tentukan polinom Taylor orde 4 dari f di 1. Jelaskan mengapa polinom ini menyatakan f secara eksak.