MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

5 Maret 2014

Kuliah yang Lalu

10.1-2 Parabola, Elips, dan Hiperbola

10.4 Persamaan Parametrik Kurva di Bidang

10.5 Sistem Koordinat Polar

11.1 Sistem Koordinat Cartesius di $\mathbf{R}^3$

11.2-4 Vektor, Hasilkali Titik, Hasilkali Silang

11.5 Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva

11.6 Garis dan Garis Singgung di Ruang

11.8 Permukaan di Ruang

Kuliah Hari Ini

10.1-2 Parabola, Elips, dan Hiperbola

10.4 Persamaan Parametrik Kurva di Bidang

10.5 Sistem Koordinat Polar

11.1 Sistem Koordinat Cartesius di $\mathbf{R}^3$

11.2-4 Vektor, Hasilkali Titik, Hasilkali Silang

11.5 Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva

11.6 Garis dan Garis Singgung di Ruang

11.8 Permukaan di Ruang

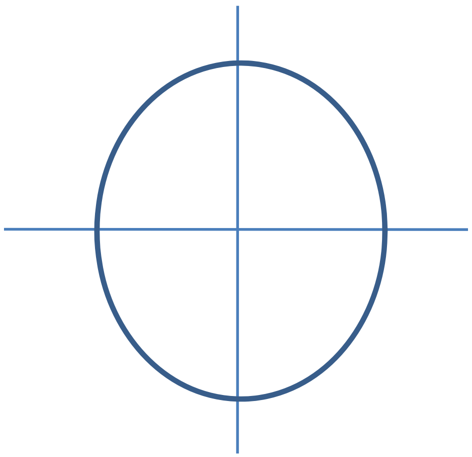
MA1201 MATEMATIKA 2A

10.4 PERSAMAAN PARAMETRIK KURVA DI BIDANG

- Mengenali kurva di bidang yang dinyatakan dalam persamaan parametrik
- Menyatakan kurva di bidang dalam persamaan parametrik
- Menghitung turunan dan integral dengan menggunakan persamaan parametrik

Mengapa Persamaan Parametrik

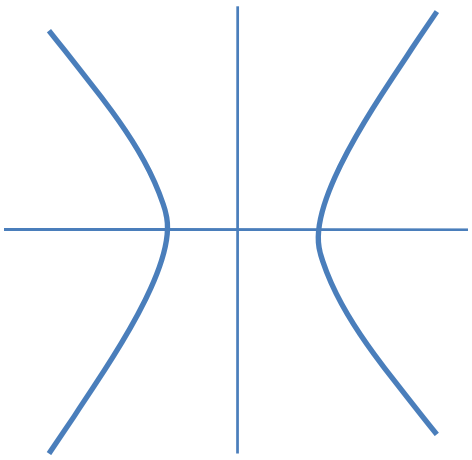
Elips dan hiperbola merupakan kurva di bidang yang bukan merupakan grafik dari suatu fungsi. Jadi, elips dan hiperbola tidak dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan $y = f(x)$.



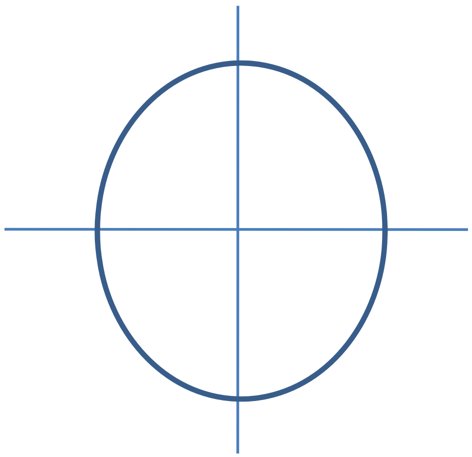
Namun, dengan menggunakan parameter t, elips dan hiperbola dapat dinyatakan dalam persamaan parametrik

$$x = f(t), \quad y = g(t), \text{ dengan } t \in I,$$

untuk suatu interval I.



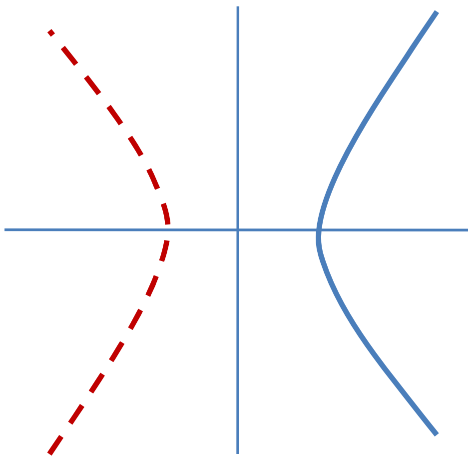
Persamaan Elips dan Hiperbola



Elips dan hiperbola dengan persamaan Cartesius

(E): $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(H): $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



dapat dinyatakan dalam persamaan parametrik

(E): $x = a \cos t,\ y = b \sin t,\ t \in [0,2\pi]$.

(H): $x = a \cosh t,\ y = b \sinh t,\ t \in \mathbf{R}$.

Beberapa Istilah

1. Pasangan persamaan $x = \mathrm{f}(t)$ dan $y = \mathrm{g}(t)$, dengan $t \in I$, disebut **parametrisasi** kurva.
2. Jika $I = [a,b]$, maka titik $P(x(a),y(a))$ disebut **titik awal** kurva, sementara titik $Q(x(b),y(b))$ disebut **titik akhir** kurva.
3. Jika titik awal sama dengan titik akhir, maka kurva dikatakan **tertutup**.
4. Jika setiap titik pada kurva hanya dilalui satu kali, maka kurva tsb disebut kurva **sederhana**.

Contoh

Persamaan parabola $y = x^2$ dapat dinyatakan dalam persamaan parametrik

$$x = t, \quad y = t^2, \quad \text{dengan } t \in \mathbf{R}.$$

Sebaliknya, persamaan parametrik

$$x = t + 1, \quad y = t^2 + 1$$

dapat dinyatakan dalam persamaan Cartesius dengan cara mengeliminasi *t*:

$$t = x - 1 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2,$$

yang merupakan persamaan sebuah parabola.

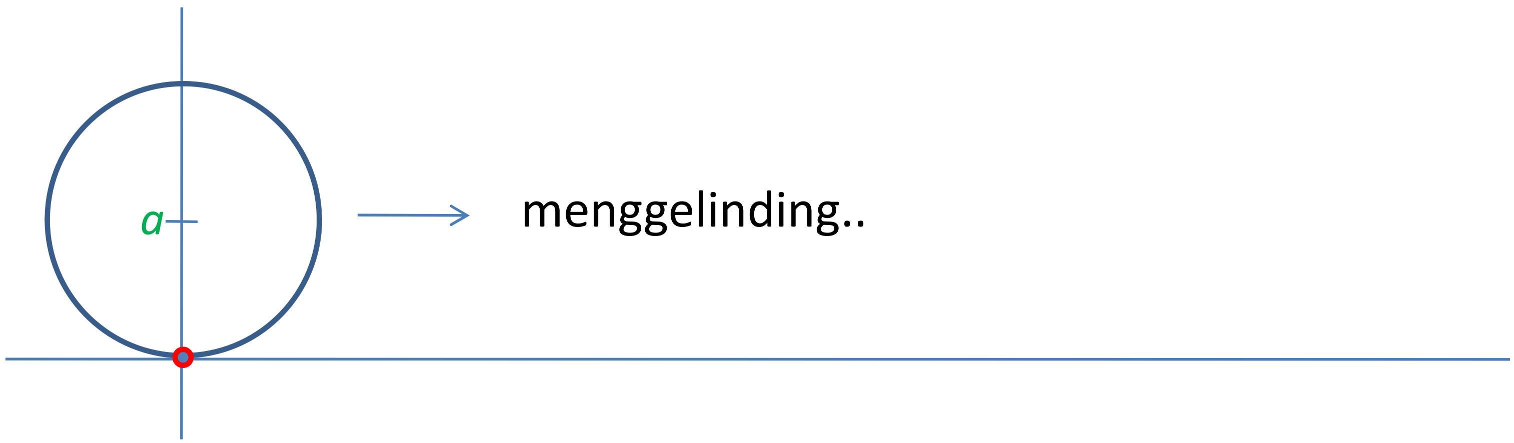
Latihan

Buktikan bahwa kedua persamaan parametrik berikut merupakan persamaan setengah lingkaran bagian kanan:

1. $x = \sqrt{1-t^2}, y = t, \qquad -1 \le t \le 1.$
2. $x = \cos t, y = \sin t, \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$

Gambarlah kurva setengah lingkaran tsb, dgn menandai titik awal dan titik akhirnya.

Sikloid



Titik merah akan menelusuri kurva sikloid.

Persamaan parametrik sikloid tsb adalah

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \text{cost } t), \quad t > 0,$$

dengan t menyatakan sudut putarnya.

Turunan Fungsi Parametrik

Misalkan f dan g mempunyai turunan yang kontinu dan $f'(t) \neq 0$. Maka persamaan parametrik

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

menyatakan y sebagai sebuah fungsi dari x yang dapat diturunkan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy / dt}{dx / dt}.$$

Contoh

Diketahui $x = 4 \cos t$, $y = 5 \sin t$, dgn $0 < t < 3$. Tentukan dy/dx pada saat $t = \pi/4$.

Jawab:

Integral dalam Parameter

Contoh:

Hitung $\int_1^2 xy^2 dx,$ jika $x = 2t + 1$, $y = t^2 + 1$.

Latihan

Tentukan luas daerah di bawah satu bagian kurva sikloid.

MA1201 MATEMATIKA 2A

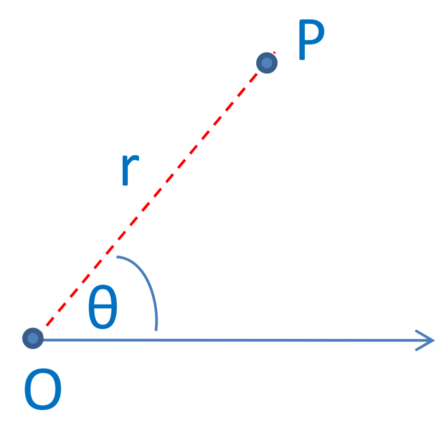
10.5 SISTEM KOORDINAT POLAR

- Mengenal sistem koordinat polar
- Menggambar kurva yang persamaannya diberikan dalam koordinat polar

Sistem Koordinat Polar

Sistem koordinat polar terdiri dari **sumbu polar** (berupa setengah garis, yang berimpit dengan sumbu-x positif pada bidang $\mathbf{R}^2$) dan **titik asal** O.

Setiap titik P pada bidang kemudian dinyatakan dengan jaraknya dari O, sebutlah r, dan besar sudut θ yang dibentuk oleh ruas garis OP dan sumbu polar (dihitung *berlawanan arah dengan arah jarum jam*).



$P = P(r,\theta)$

Hubungan Koordinat Polar dan Koordinat Cartesius

Jika $P = P(r,\theta)$, maka P dapat dinyatakan dalam koordinat Cartesius sebagai $P = P(x,y)$ dengan

$$x = r \cos \theta \quad \text{dan} \quad y = r \sin \theta.$$

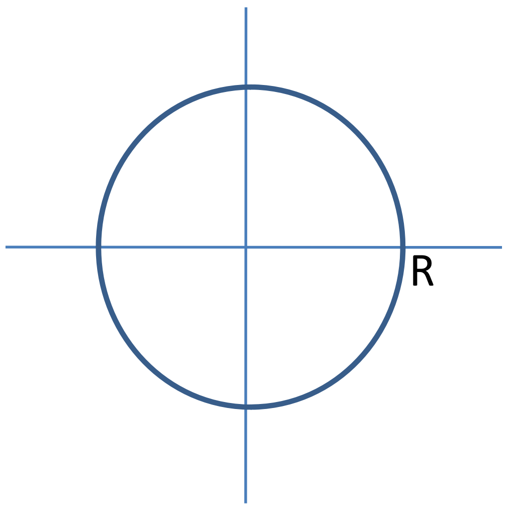
Sebaliknya, jika $P = P(x,y)$, maka P dapat dinyatakan dalam koordinat polar $P = P(r,\theta)$ dengan

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ dan } \tan \theta = y/x,$$

dengan penafsiran nilai θ yg tepat untuk $x = 0$.

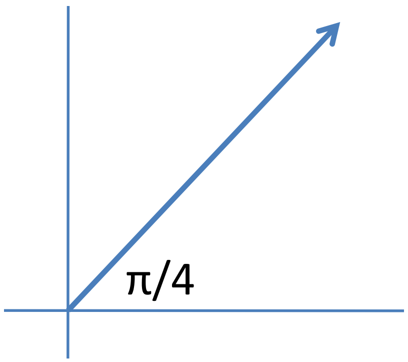
Persamaan Kurva dalam Koordinat Polar

Persamaan lingkaran yang ber-pusat di O dan berjari-jari R dapat dinyatakan secara sederhana dalam koordinat polar sebagai



$$r = R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Persamaan setengah garis $y = x$, dengan $x > 0$, dapat dinyatakan dalam koordinat polar sebagai



$$\theta = \pi/4, \quad r > 0.$$

Latihan

Buktikan bahwa persamaan $r = 8 \cos \theta$ merupa-kan persamaan lingkaran yang berpusat di titik (4,0) dan berjari-jari 4. (*Petunjuk*. Kalikan kedua ruas dengan r.) Gambar lingkaran tsb pd bidang.

Soal

Gambarlah (pada bidang) daerah yang terletak

(i) di dalam lingkaran $r = 4$ dan juga di dalam lingkaran $r = 8 \cos \theta$.

(ii) di dalam lingkaran $r = 4$ dan di luar lingkaran $r = 8 \cos \theta$.

(iii) di luar lingkaran $r = 4$ dan di dalam lingkaran $r = 8 \cos \theta$.