

MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

5 Maret 2014

Kuliah yang Lalu

10.1-2 Parabola, Elips, dan Hiperbola

10.4 Persamaan Parametrik Kurva di Bidang

10.5 Sistem Koordinat Polar

11.1 Sistem Koordinat Cartesius di \mathbf{R}^3

11.2-4 Vektor, Hasilkali Titik, Hasilkali Silang

11.5 Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva

11.6 Garis dan Garis Singgung di Ruang

11.8 Permukaan di Ruang

Kuliah Hari Ini

10.1-2 Parabola, Elips, dan Hiperbola

10.4 Persamaan Parametrik Kurva di Bidang

10.5 Sistem Koordinat Polar

11.1 Sistem Koordinat Cartesius di R^3

11.2-4 Vektor, Hasilkali Titik, Hasilkali Silang

11.5 Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva

11.6 Garis dan Garis Singgung di Ruang

11.8 Permukaan di Ruang

11.1 SISTEM KOORDINAT CARTESIUS DI \mathbf{R}^3

- Memahami sistem koordinat Cartesius di \mathbf{R}^3
- Mengenali dan menggambar grafik persamaan di \mathbf{R}^3

Apa yang Akan Dipelajari

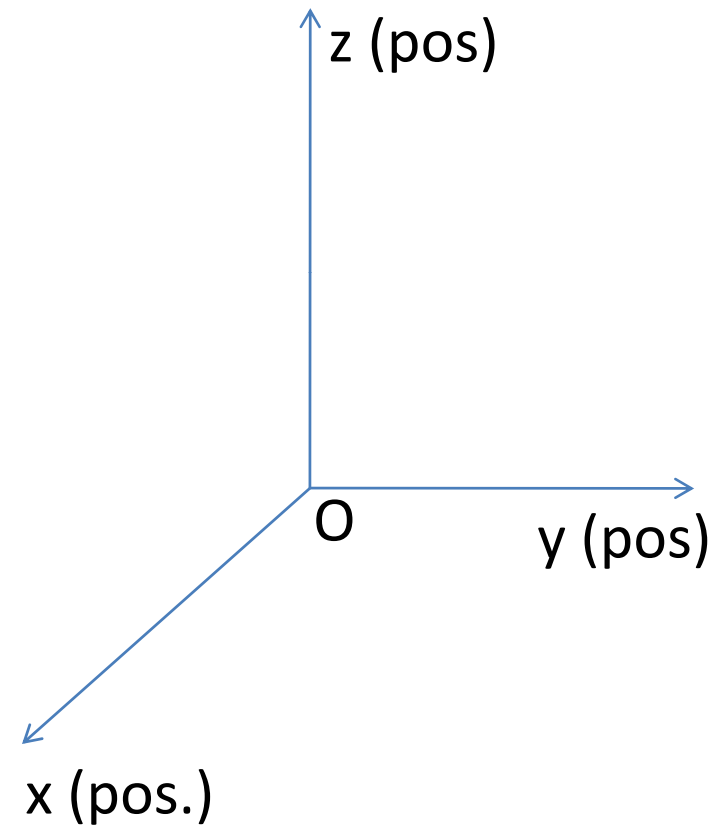
Kelak kita akan membahas vektor di bidang (\mathbf{R}^2) dan di ruang (\mathbf{R}^3), dan setelah itu kita akan membahas pula fungsi bernilai vektor.

Sistem koordinat Cartesius (dan polar) di \mathbf{R}^2 telah kita pelajari dengan baik.

Sekarang kita akan mempelajari sistem koordinat Cartesius di \mathbf{R}^3 .

Sistem Koordinat Cartesius di \mathbf{R}^3

Sistem Koordinat Cartesius di \mathbf{R}^3 terdiri dari 3 sumbu yang saling tegak lurus dan berpotongan di titik O, yang kemudian disebut sebagai **titik asal**. Ketiga sumbu tsb biasanya disebut sebagai sumbu-x, sumbu-y, dan sumbu-z, dan membagi ruang menjadi 8 **oktan**.

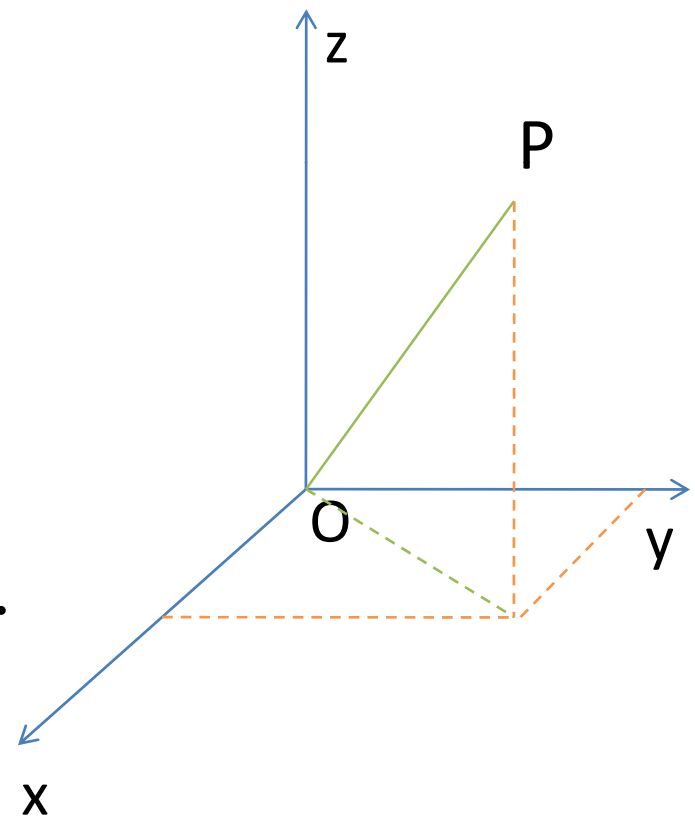


Sistem Koordinat Cartesius di \mathbf{R}^3

Setiap titik P di \mathbf{R}^3 dinyatakan sebagai koordinat $P(x,y,z)$, seperti pd gambar.

Jarak antara 2 titik $P(x_1,y_1,z_1)$ dan $Q(x_2,y_2,z_2)$ diberikan oleh rumus $|PQ| =$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



Persamaan Bola, Bidang, dan Garis

1. Persamaan bola yang berpusat di $P(a,b,c)$ dan berjari-jari R adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

2. Persamaan umum bidang di \mathbf{R}^3 adalah

$$Ax + By + Cz = D, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

3. Persamaan $\frac{x - a}{p} = \frac{y - b}{q} = \frac{z - c}{r}$

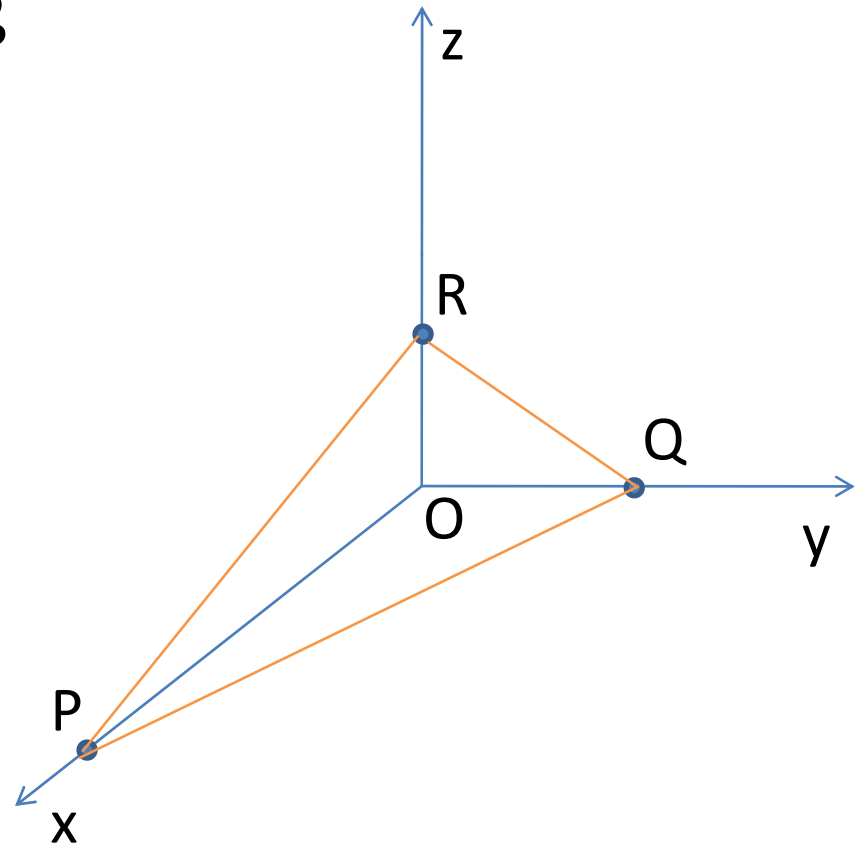
menyatakan garis lurus yang melalui $T(a,b,c)$ dan searah dengan vektor (p,q,r) .

Contoh: Menggambar Bidang di \mathbf{R}^3

Gambarlah bidang yang memiliki persamaan

$$x + 2y + 3z = 6.$$

Jawab: Bidang melalui titik $P(6,0,0)$, $Q(0,3,0)$, dan $R(0,0,2)$.



Soal

Gambarlah bidang di \mathbf{R}^3 yg memiliki persamaan
 $2x + 3z = 12$.

11.2-4 VEKTOR, HASILKALI TITIK, DAN HASILKALI SILANG

- Memahami sifat-sifat vektor di \mathbf{R}^2 dan \mathbf{R}^3
- Menghitung jumlah dua vektor, hasilkali vektor dengan skalar, dan besar vektor
- Menghitung hasilkali titik dan hasilkali silang dua vektor, dan mengetahui sifat-sifatnya

Apa dan Mengapa Vektor

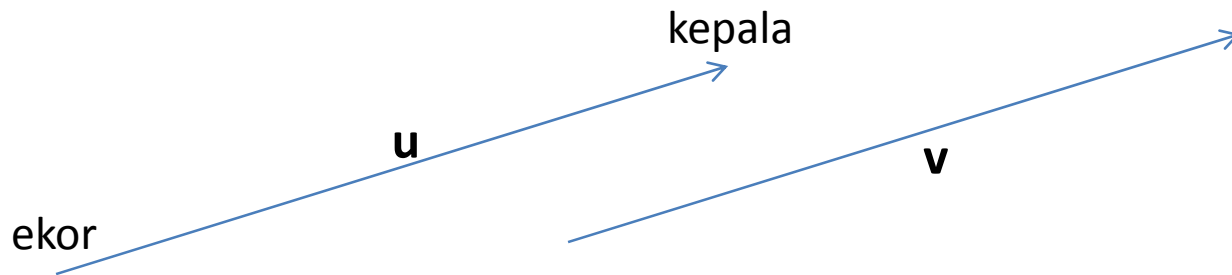
Kuantitas panjang, massa, dan waktu merupakan **skalar**, yang dapat dinyatakan dengan sebuah bilangan.

Kuantitas fisis lainnya seperti kecepatan dan gaya tidak hanya mempunyai panjang atau **besar** (*magnitude*) tetapi juga **arah**.

Besaran atau kuantitas tsb dikenal sebagai **vektor**. Pemahaman tentang vektor juga diperlukan untuk mempelajari fungsi dengan banyak peubah.

Vektor: Pendekatan Geometri

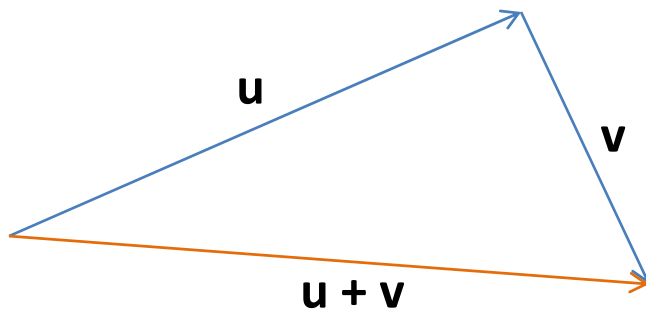
Secara geometri, vektor dinyatakan sebagai anak panah, yang mempunyai titik awal (**ekor**) dan titik akhir (**kepala**), dan dituliskan dengan huruf tebal misalnya **u** atau **v**.



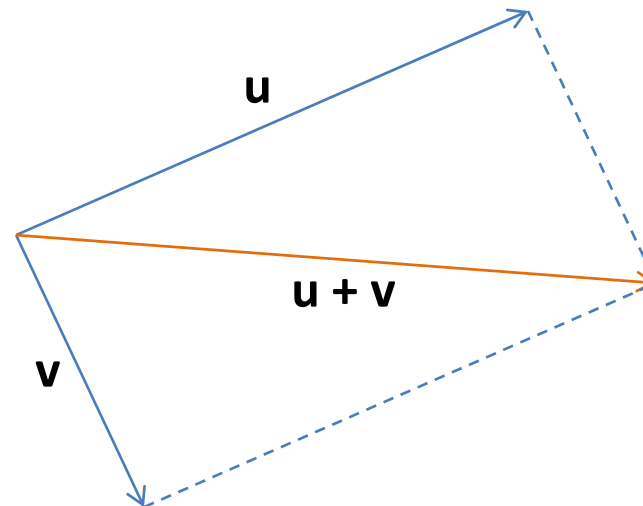
Dua vektor dikatakan sama atau **setara** apabila kedua vektor tsb mempunyai panjang dan arah yang sama. Sbg contoh, **u** dan **v** di atas setara.

Penjumlahan Dua Vektor

Diberikan dua vektor, kita dapat menghitung jumlahnya dengan dua cara:



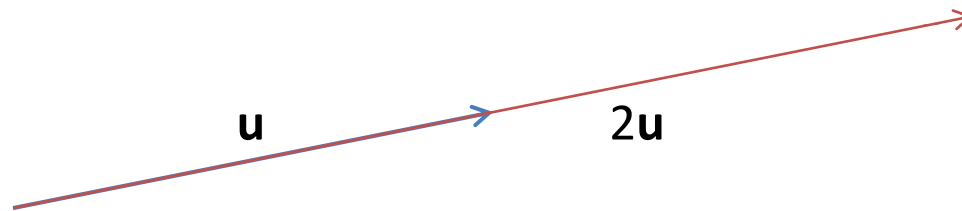
Cara Segitiga



Cara Jajargenjang

Perkalian dengan Skalar

Kita juga dapat mengalikan vektor dgn skalar:

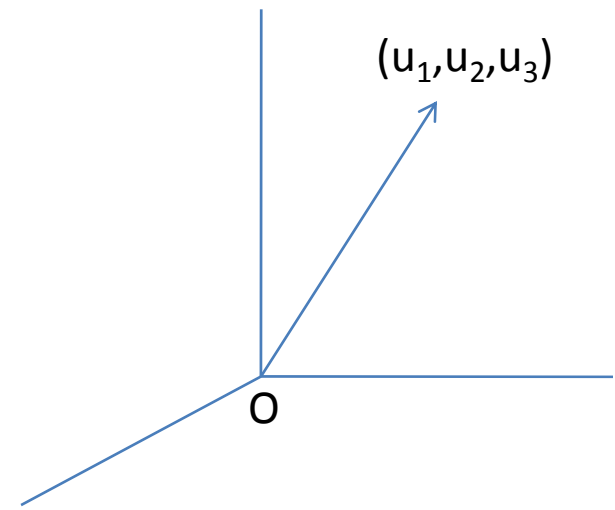
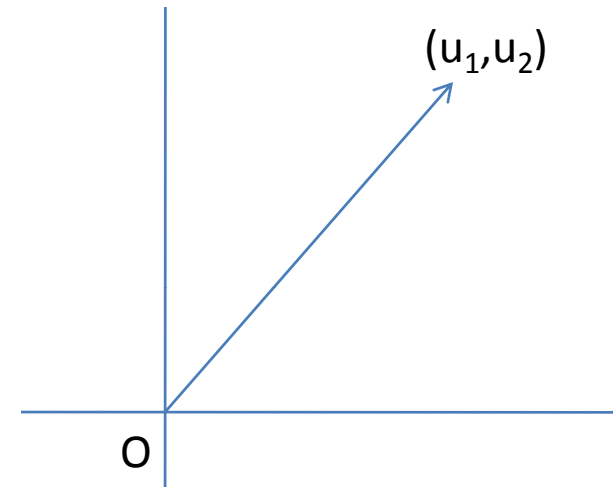


Selisih dua vektor, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, dimaknai sebagai hasil operasi $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$.

Vektor: Pendekatan Aljabar

Di \mathbf{R}^2 : vektor \mathbf{u} dinyatakan sebagai pasangan terurut (u_1, u_2) . [Dalam hal ini, ekor vektor \mathbf{u} adalah $O(0,0)$ dan kepalanya adalah (u_1, u_2) .]

Di \mathbf{R}^3 : vektor \mathbf{u} dinyatakan sebagai tripel (u_1, u_2, u_3) .



Perkalian dengan Skalar dan Penjumlahan

Di \mathbf{R}^2 : Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, dan $c \in \mathbf{R}$, maka

$$c \mathbf{u} := (cu_1, cu_2)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Di \mathbf{R}^3 : Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, dan $c \in \mathbf{R}$, maka

$$c \mathbf{u} := (cu_1, cu_2, cu_3)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Vektor Basis

Di \mathbf{R}^2 : vektor $\mathbf{i} = (1,0)$ dan $\mathbf{j} = (0,1)$ disebut sebagai vektor basis (baku). Vektor \mathbf{u} dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}.$$

Di \mathbf{R}^3 : vektor $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, dan $\mathbf{k} = (0,0,1)$ merupakan vektor basis (baku).

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}.$$

Besar atau Panjang Vektor

$$\text{Di } \mathbf{R}^2: \|\bar{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

$$\text{Di } \mathbf{R}^3: \|\bar{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Catatan. Vektor yang panjangnya sama dengan 1 disebut **vektor satuan**.

Teorema (Sifat Aljabar Vektor)

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

5. $a(\mathbf{bu}) = (ab)\mathbf{u}$

6. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

7. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

9. $\|a\bar{\mathbf{u}}\| = |a| \cdot \|\bar{\mathbf{u}}\|.$

Hasilkali Titik

$$\text{Di } \mathbf{R}^2: \bar{u} \bullet \bar{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

$$\text{Di } \mathbf{R}^3: \bar{u} \bullet \bar{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Catatan: $\bar{u} \bullet \bar{u} = \|\bar{u}\|^2.$

Sifat Hasilkali Titik

$$1. \quad \bar{u} \bullet \bar{v} = \bar{v} \bullet \bar{u}$$

$$2. \quad \bar{u} \bullet (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \bullet \bar{v} + \bar{u} \bullet \bar{w}$$

$$3. \quad c(\bar{u} \bullet \bar{v}) = (c\bar{u}) \bullet \bar{v}$$

$$4. \quad \bar{0} \bullet \bar{v} = 0$$

Teorema

Jika θ adalah sudut tak negatif antara dua vektor tak nol \mathbf{u} dan \mathbf{v} , maka

$$\bar{\mathbf{u}} \bullet \bar{\mathbf{v}} = \|\bar{\mathbf{u}}\| \cdot \|\bar{\mathbf{v}}\| \cos \theta.$$

Definisi: Dua vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} *tegak lurus* jika dan hanya jika $\bar{\mathbf{u}} \bullet \bar{\mathbf{v}} = 0$.

Hasilkali Silang di \mathbf{R}^3

Definisi: Hasil kali silang antara \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} := (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Dapat diperiksa bahwa $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

Sifat Hasilkali Silang

1. $\bar{u} \bullet (\bar{u} \times \bar{v}) = 0 = \bar{v} \bullet (\bar{u} \times \bar{v})$.

yakni $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tegak lurus pada \mathbf{u} dan \mathbf{v} .

2. \mathbf{u} , \mathbf{v} , dan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ membentuk tripel tangan kanan.

3. $\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \sin \theta$.

Sifat Hasilkali Silang

$$1. \quad \bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}.$$

$$2. \quad k(\bar{u} \times \bar{v}) = (k\bar{u}) \times \bar{v} = \bar{u} \times (k\bar{v}).$$

$$3. \quad (\bar{u} \times \bar{v}) \bullet \bar{w} = \bar{u} \bullet (\bar{v} \times \bar{w}).$$

Soal

Buktikan bahwa: $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$.