MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

12 Maret 2014

Kuliah yang Lalu

10.1-2 Parabola, Elips, dan Hiperbola

10.4 Persamaan Parametrik Kurva di Bidang

10.5 Sistem Koordinat Polar

11.1 Sistem Koordinat Cartesius di R^3

11.2-4 Vektor, Hasilkali Titik, Hasilkali Silang

11.5 Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva

11.6 Garis dan Garis Singgung di Ruang

11.8 Permukaan di Ruang

Kuliah Hari Ini

10.1-2 Parabola, Elips, dan Hiperbola

10.4 Persamaan Parametrik Kurva di Bidang

10.5 Sistem Koordinat Polar

11.1 Sistem Koordinat Cartesius di $\mathbf{R}^3$

11.2-4 Vektor, Hasilkali Titik, Hasilkali Silang

11.5 Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva

11.6 Garis dan Garis Singgung di Ruang

11.8 Permukaan di Ruang

11.5 FUNGSI BERNILAI VEKTOR DAN GERAK SEPANJANG KURVA

- Menghitung limit dan turunan fungsi ber-nilai vektor
- Menentukan kecepatan dan percepatan dari suatu partikel yang bergerak sepanjang kurva yang diketahui persamaan posisinya

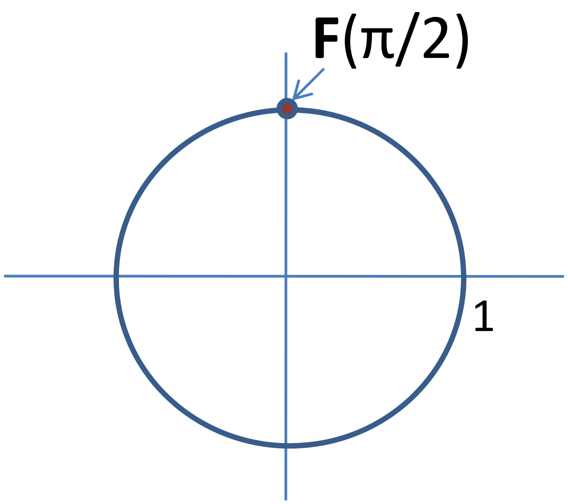
Fungsi Bernilai Vektor

Fungsi **F** yang memetakan tiap bilangan real $t \in I$ ke suatu vektor **F**(t) di $\mathbf{R}^2$ atau $\mathbf{R}^3$ disebut sebagai **fungsi bernilai vektor**.

Sebagai contoh,

$$\mathbf{F}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

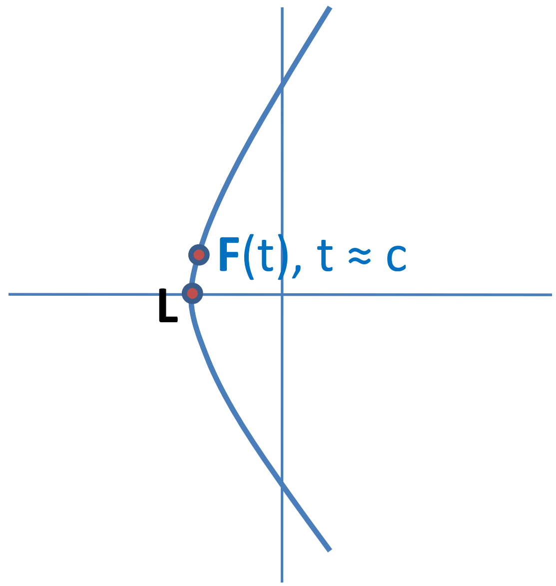
merupakan fungsi bernilai vektor. *Daerah nilai* fungsi ini adalah lingkaran yang berpusat di (0,0) dan berjari-jari 1.



Limit Fungsi Bernilai Vektor

Kita tuliskan $\lim_{t \to c} \overline{F}(t) = \overline{L}$ apabila untuk setiap ε > 0 terdapat δ > 0 sehingga

$$0 < |t - c| < \delta \Rightarrow \|\overline{F}(t) - \overline{L}\| < \varepsilon.$$



Secara intuitif: *semakin dekat t ke c, semakin dekat **F**(t) ke **L**.*

Teorema

Misalkan **F**(t) = f(t)**i** + g(t)**j**. Maka **F** mempunyai limit di c jika dan hanya jika f dan g mempunyai limit di c. Dalam hal ini,

$$\lim_{t\to c} \overline{F}(t) = \lim_{t\to c} f(t).\bar{i} + \lim_{t\to c} g(t).\bar{j}.$$

Sebagai akibatnya, **F kontinu** di c jika dan hanya jika $\lim_{t\to c} \overline{F}(t) = \overline{F}(c)$.

<u>Catatan</u>. Hal serupa berlaku utk fungsi bernilai vektor di $\mathbf{R}^3$.

Contoh/Latihan

Tentukan nilai **F**(0) agar fungsi **F** yang di-definisikan

$$\overline{F}(t) = \frac{\sin t}{t}\,\bar{i} + \frac{1-e^{t}}{t}\,\bar{j}, \qquad t \neq 0,$$

menjadi fungsi yg kontinu di setiap titik.

Turunan Fungsi Bernilai Vektor

Misalkan **F** = (f, g) adalah fungsi bernilai vektor. **Turunan** **F** di c didefinisikan sebagai

$$\overline{F}'(c) = \lim_{t \to c} \frac{\overline{F}(t) - \overline{F}(c)}{t - c}.$$

Berdasarkan teorema tentang limit fungsi bernilai vektor, kita dapatkan: jika f dan g mempunyai turunan di c, maka

$$\overline{F}'(c) = f'(c)\,\overline{i} + g'(c)\,\overline{j}.$$

Teorema

Misalkan **F** dan **G** mempunyai turunan, *p* fungsi skalar yang mempunyai turunan, dan *c* skalar. Maka

1. $D_t[\overline{F}(t)+\overline{G}(t)]=\overline{F}'(t)+\overline{G}'(t)$
2. $D_t[c.\overline{F}(t)]=c.\overline{F}'(t)$
3. $D_t[p(t).\overline{F}(t)]=p(t)\overline{F}'(t)+p'(t)\overline{F}(t)$
4. $D_t[\overline{F}(t)\bullet\overline{G}(t)]=\overline{F}'(t)\bullet\overline{G}(t)+\overline{F}(t)\bullet\overline{G}'(t)$
5. $D_t[\overline{F}(p(t))]=p'(t).\overline{F}'(p(t))$

Teorema

Misalkan **F** dan **G** fungsi bernilai vektor di **R**^{3}.
Jika **F** dan **G** mempunyai turunan, maka

6. $D_t[\overline{F}(t) \times \overline{G}(t)] = \overline{F}'(t) \times \overline{G}(t) + \overline{F}(t) \times \overline{G}'(t)$
$D_t[c.\overline{F}(t)] = c.\overline{F}'(t)$

Catatan. D_t menyatakan operasi turunan terhadap t.

Contoh/Latihan

Tentukan apakah fungsi **F** yang didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\overline{F}(t) &= \frac{\sin t}{t}\,\bar{i} + \frac{1-e^{t}}{t}\,\bar{j}, && t \neq 0,\\ &= \bar{i} - \bar{j}, && t = 0,\end{aligned}$$

mempunyai turunan di 0.

Contoh/Latihan

Diketahui $\mathbf{F}(t) = (\cos t, \sin t)$ dan $p(t) = t^2$.
Tentukan:

1. $D_t[p(t).\mathbf{F}(t)]$
2. $D_t\mathbf{F}(p(t))$

Integral Fungsi Bernilai Vektor

Intergral dari fungsi **F** yang bernilai vektor di $\mathbf{R}^2$ didefinisikan sebagai

$$\int \overline{F}(t)dt = \left(\int f(t)dt\right).\overline{i} + \left(\int g(t)dt\right).\overline{j}$$

$$\int_a^b \overline{F}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right).\overline{i} + \left(\int_a^b g(t)dt\right).\overline{j}$$

<u>Catatan</u>. Integral dari fungsi bernilai vektor di $\mathbf{R}^3$ didefinisikan serupa.

Gerak Sepanjang Kurva

Misalkan sebuah partikel bergerak sepanjang suatu kurva di bidang dengan persamaan

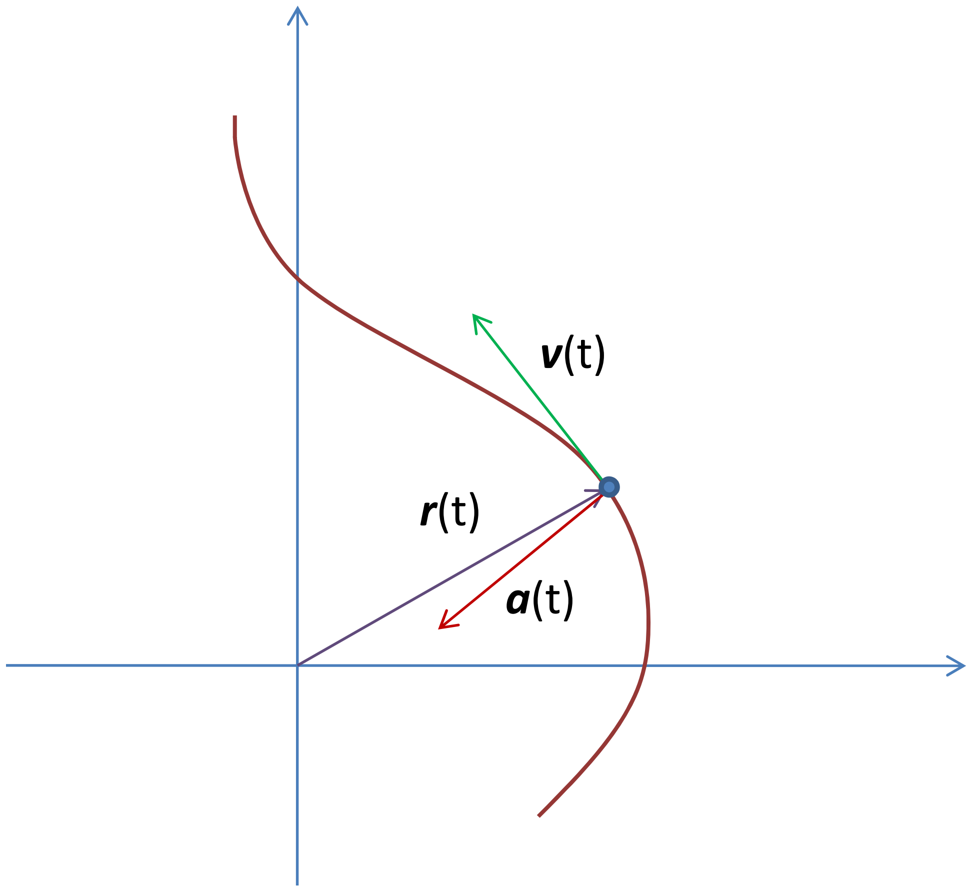
$$\boldsymbol{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \quad t \in I,$$

yakni, pada saat t, **vektor posisi** partikel tsb adalah $(f(t),g(t))$. Maka, **kecepatan** dan **percepatan** partikel tsb adalah

$$\boldsymbol{v}(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}, \quad t \in I,$$

$$\boldsymbol{a}(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j}, \quad t \in I.$$

Gerak Sepanjang Kurva



Contoh

Diketahui sebuah partikel bergerak di bidang dengan persamaan

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \qquad t > 0.$$

(a) Tentukan vektor kecepatan dan percepatan-nya.

(b) Periksa bahwa $\bar{v}(t) \perp \bar{r}(t)$ dan $\bar{a}(t) \perp \bar{v}(t)$.

(c) Buktikan bahwa lajunya, yaitu $|\boldsymbol{v}(t)|$, konstan.

Soal

Diketahui sebuah partikel bergerak di bidang/ ruang dengan $\boldsymbol{r}(t)$ menyatakan vektor posisinya pada saat t. Buktikan bahwa $|\boldsymbol{r}(t)|$ konstan jika dan hanya jika $\boldsymbol{r}(t) \bullet \boldsymbol{r}'(t) = 0$.

MA1201 MATEMATIKA 2A

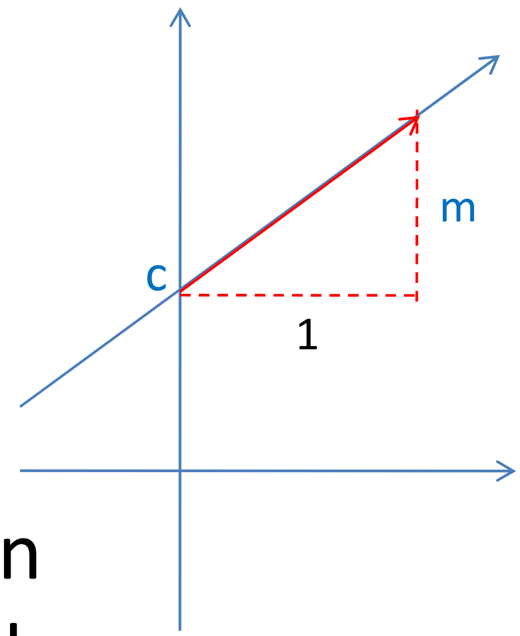
11.6 GARIS DAN GARIS SINGGUNG DI RUANG

- Menentukan persamaan garis di ruang, baik dalam bentuk persamaan vektor, persamaan parametrik, atau persamaan Cartesius

Persamaan Garis di Bidang

Persamaan Cartesius garis di bidang yang memotong sumbu-y di $P(0,c)$ dan mempunyai gradien m adalah

$$y = mx + c.$$



Persamaan garis ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan parametrik

$$x = t, \quad y = mt + c,$$

atau **persamaan vektor**

$$\boldsymbol{r}(t) = (t, mt+c) = (0,c) + t(1,m).$$

Garis melalui $(0,c)$ dan mempunyai **vektor arah** $(1,m)$.

Persamaan Garis di Bidang

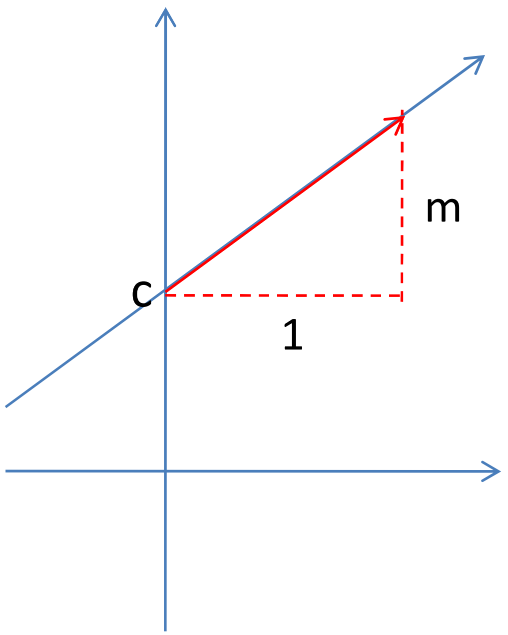
Dari persamaan parametrik

$$x = t,\ \ y = mt + c,$$

kita dapat pula memperoleh **persamaan simetrik**

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-c}{m}.$$

Perhatikan bahwa garis melalui P(0,c) dan mempunyai vektor arah $\boldsymbol{v}$ = (1,m) terekam dalam persamaan simetrik.



Persamaan Garis di Ruang

Persamaan garis yang melalui titik $P(x_0,y_0,z_0)$ dan mempunyai vektor arah $\mathbf{v} = (a,b,c)$ adalah

$\boldsymbol{r}(t) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$ … persamaan vektor

$x = x_0 + ta$, $y = y_0 + tb$, $z = z_0 + tc$ … p. parametrik

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \ldots$$ persamaan simetrik

Contoh

Diketahui sebuah garis melalui titik P(1,-2,3) dan Q(4,5,6). Tentukan persamaan vektor, persamaan parametrik, dan persamaan simetrik garis tsb.

Jawab:

Soal 1

Persamaan bidang yang melalui titik $P(x_0,y_0,z_0)$ dan mempunyai **vektor normal** $\boldsymbol{n} = (n_1,n_2,n_3)$ diberikan oleh $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\bullet\boldsymbol{n} = 0$.

Tentukan persamaan garis yang merupakan perpotongan dua bidang: $2x - y - 5z = -6$ dan $4x + 5y + 4z = 9$.

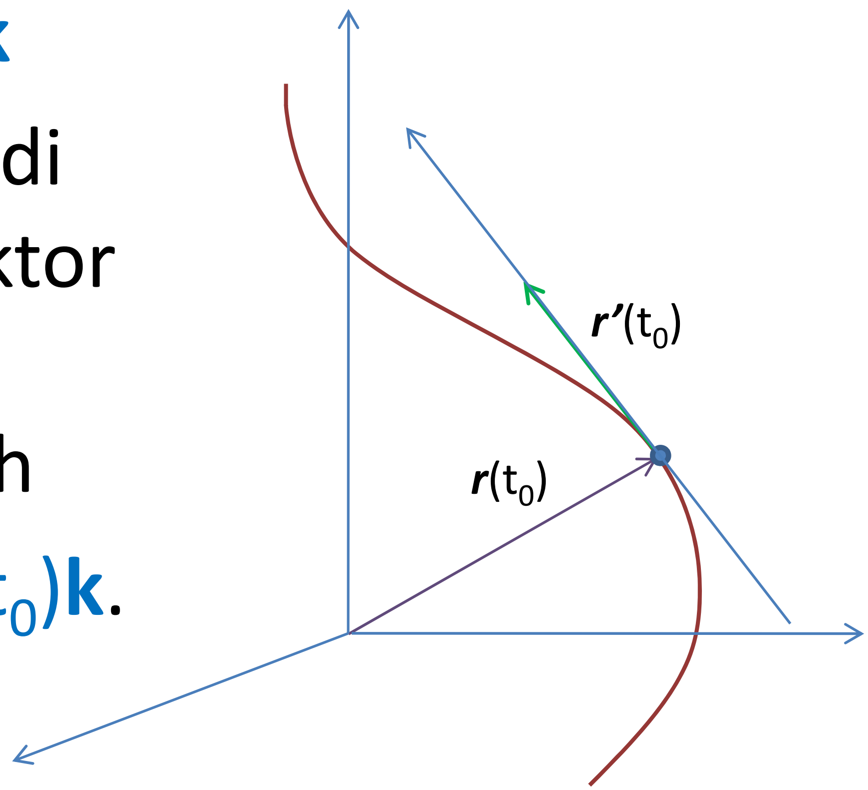
Garis Singgung pada Kurva di Ruang

Persamaan

$$\boldsymbol{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

menyatakan sebuah kurva di ruang. Pada saat $t = t_0$, vektor posisi-nya adalah $\boldsymbol{r}(t_0)$ dan **vektor singgung**-nya adalah

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = f'(t_0)\mathbf{i} + g'(t_0)\mathbf{j} + h'(t_0)\mathbf{k}.$$



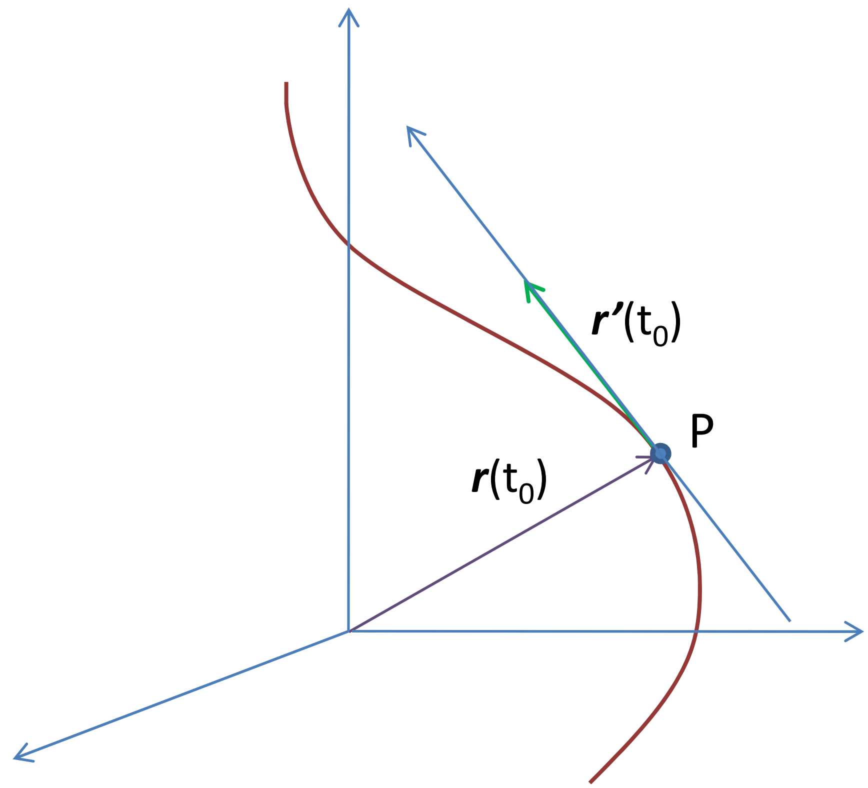
Persamaan Garis Singgung pada Kurva

Persamaan parametrik garis singgung pada kurva tsb di titik $P = \boldsymbol{r}(t_0)$ adalah:

$$x = f(t_0) + t.f'(t_0),$$

$$y = g(t_0) + t.g'(t_0),$$

$$z = h(t_0) + t.h'(t_0).$$



Soal 2

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ di titik $P(1,1,1)$.