

MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

19 Maret 2014

Kuliah yang Lalu

10.1-2 Parabola, Elips, dan Hiperbola

10.4 Persamaan Parametrik Kurva di Bidang

10.5 Sistem Koordinat Polar

11.1 Sistem Koordinat Cartesius di R^3

11.2-4 Vektor, Hasilkali Titik, Hasilkali Silang

11.5 Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva

11.6 Garis dan Garis Singgung di Ruang

11.8 Permukaan di Ruang

Kuliah Hari Ini

11.8 Permukaan di Ruang

dan

12.1 Fungsi Dua (atau Lebih) Peubah

MA1201 MATEMATIKA 2A

11.8 PERMUKAAN DI RUANG

- Menggambar permukaan di ruang

Bola dan Bidang di Ruang

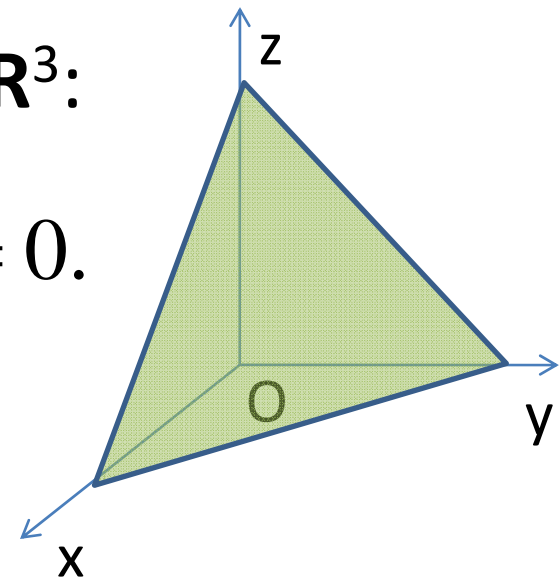
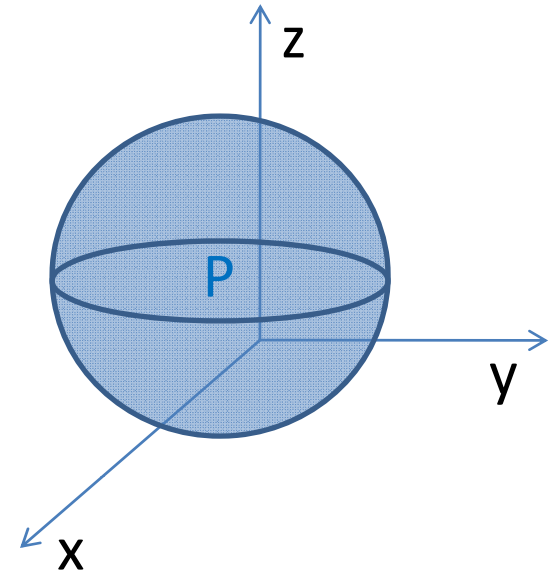
Ingat persamaan **bola** yang berpusat di $P(a,b,c)$ dan berjari-jari R :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$

dan persamaan umum **bidang** di \mathbf{R}^3 :

$$Ax + By + Cz = D, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Seperti apa grafiknya?



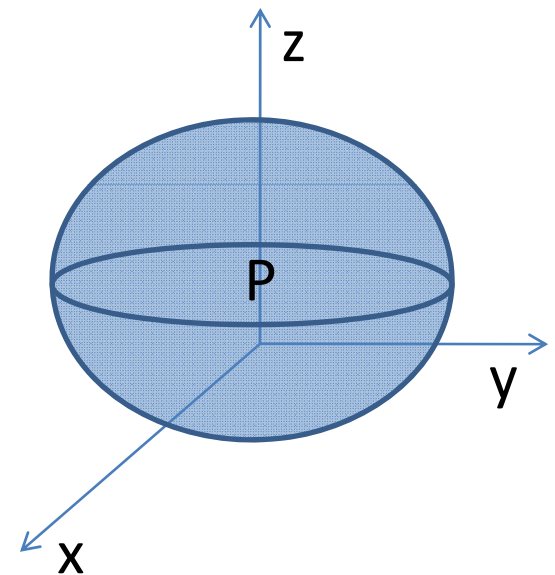
Elipsoida

Lebih umum daripada bola, kita mempunyai persamaan **elipsoida**:

$$\frac{(x-a)^2}{p^2} + \frac{(y-b)^2}{q^2} + \frac{(z-c)^2}{r^2} = 1.$$

Perhatikan jika $p = q = r$, maka persamaan di atas menjadi

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$,
yang merupakan persamaan bola.



Permukaan di Ruang

Bidang dan elipsoida merupakan contoh permukaan di ruang.

Secara umum, grafik persamaan $F(x,y,z) = C$ merupakan **permukaan** di ruang.

Namun, tidak semua persamaan mudah digambar grafiknya.

Paraboloida dan Hiperboloida

Grafik persamaan

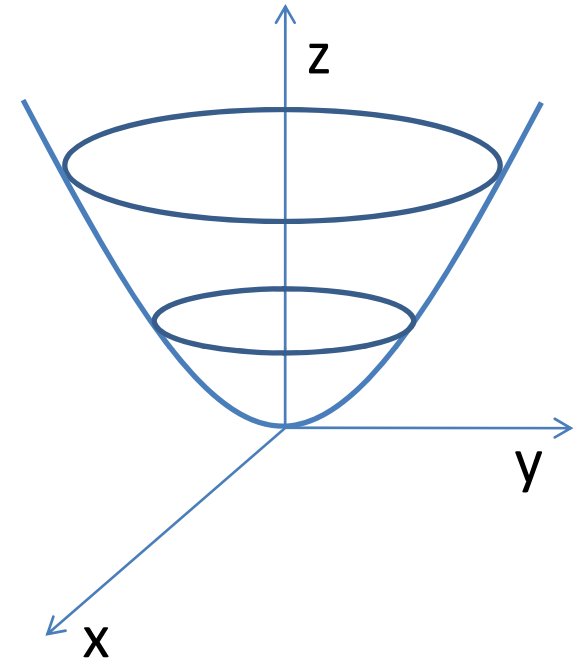
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

merupakan **paraboloida eliptik**.

Sementara itu, grafik persamaan

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

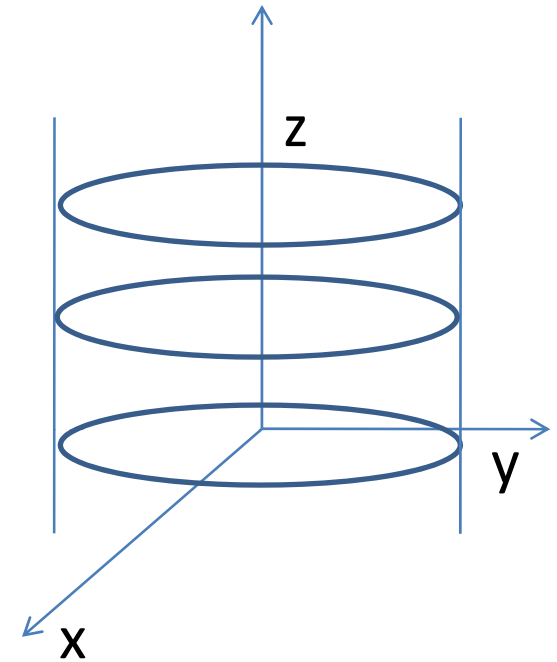
merupakan **paraboloida hiperbolik**.



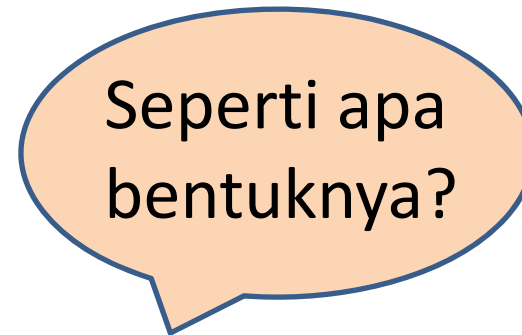
Seperti apa bentuknya?

Silinder

Grafik persamaan $x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbf{R}$, merupakan **silinder lingkaran** yang sejajar dengan sumbu-z.



Bagaimana dengan persamaan
 $z = \sin y, \quad x > 0$?



Hiperboloida Satu Lembar

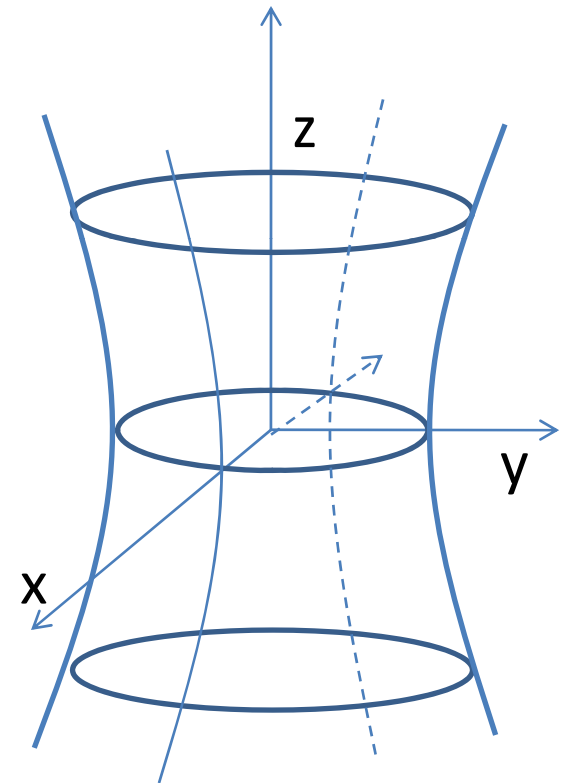
Grafik persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

merupakan **hiperboloida satu lembar**.

Irisannya dengan:

- Bidang $z=k \rightarrow$ elips
- bidang- $xz \rightarrow$ hiperbola
- bidang- $yz \rightarrow$ hiperbola



Hiperboloida Dua Lembar

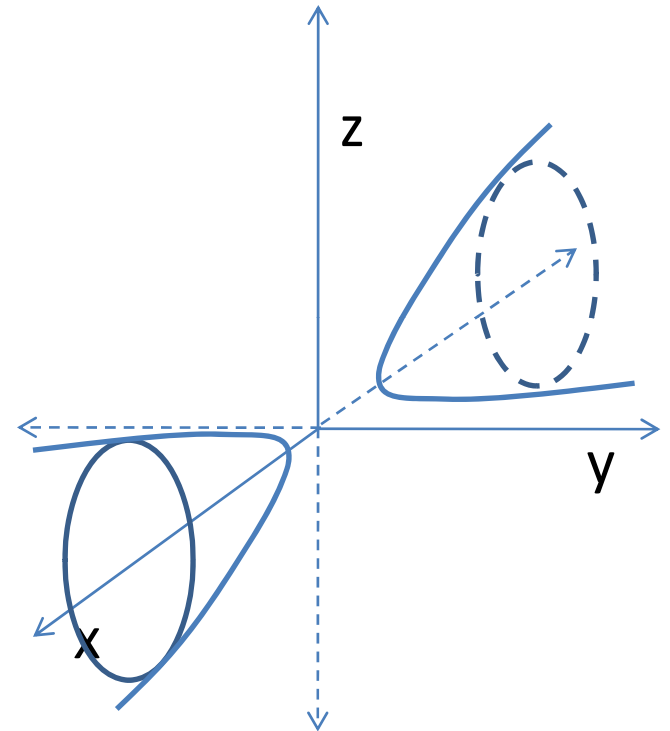
Grafik persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

merupakan **hiperboloida dua lembar**.

Irisannya dengan:

- bidang-xy \rightarrow hiperbola
- bidang $x=k$ \rightarrow elips, titik, \emptyset
- bidang-yz \rightarrow himp. kosong

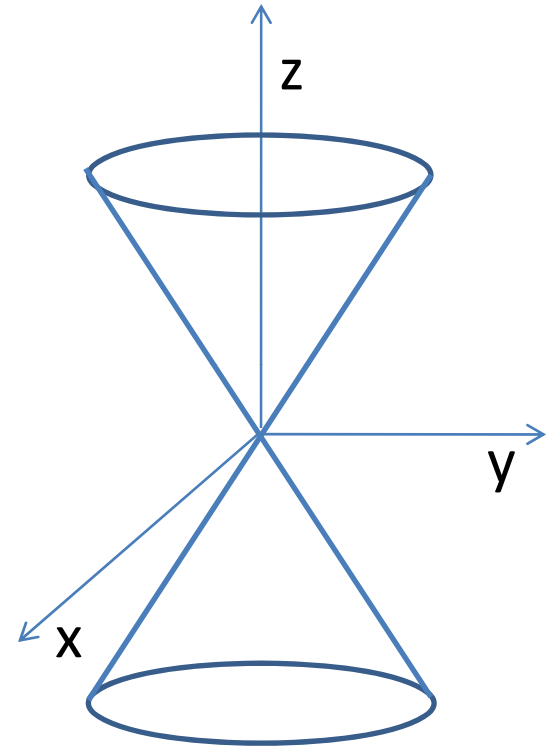


Kerucut Eliptik

Grafik persamaan

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

berbentuk **kerucut eliptik**
(ganda).



Soal

Diketahui persamaan

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Gambarlah grafiknya.

Permukaan apakah itu?

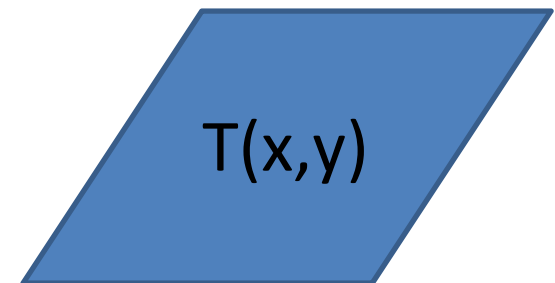
12.1 FUNGSI DUA (ATAU LEBIH) PEUBAH

- Menentukan daerah asal dan menggambar grafik fungsi dua peubah
- Menentukan kurva ketinggian dan menggambar peta kontur fungsi dua peubah

Fungsi Dua (atau Lebih) Peubah

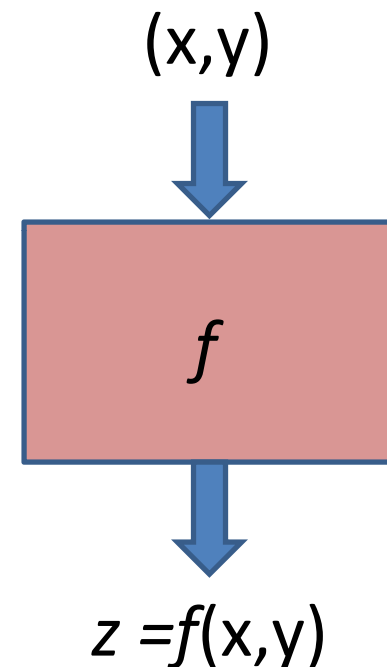
Setelah mempelajari fungsi satu peubah, baik yang bernilai skalar maupun yang bernilai vektor, sekarang kita akan mempelajari fungsi dengan dua (atau lebih) peubah.

Sebagai contoh, foto atau citra 2D merupakan fungsi dua peubah. Demikian juga suhu T pada suatu keping datar.



Fungsi Dua Peubah

Di sini kita akan membahas secara khusus **fungsi dua peubah** yang bernilai skalar, yakni fungsi f yang memetakan setiap titik (x,y) dalam suatu daerah D di \mathbf{R}^2 ke suatu bilangan $z = f(x,y) \in \mathbf{R}$.



Catatan

Himpunan D disebut sebagai **daerah asal** f , sedangkan himpunan $\{z = f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$ disebut **daerah nilai** f .

Bila tidak dinyatakan secara spesifik, maka daerah asal fungsi f adalah himpunan bagian terbesar dari \mathbf{R}^2 yang membuat f terdefinisi.

Sebagai contoh, daerah asal $f(x,y) = x/y$ adalah semua titik (x,y) dengan $y \neq 0$.

Contoh

Tentukan daerah asal $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
dan gambarlah daerah tsb pada \mathbf{R}^2 .

Jawab:

Grafik Fungsi Dua Peubah

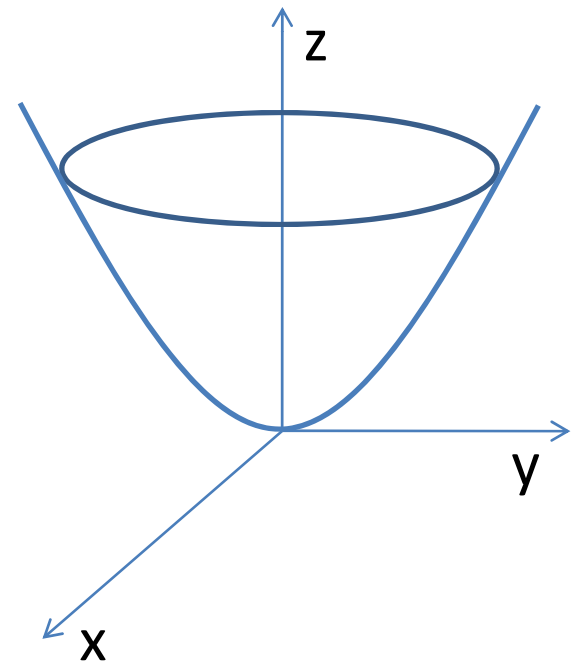
Diberikan fungsi dua peubah dengan persamaan $z = f(x,y)$, dengan $(x,y) \in D$, kita dapat menggambar grafiknya, yaitu himpunan

$$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}$$

di ruang \mathbf{R}^3 .

Contoh:

$$z = f(x,y) := x^2 + y^2$$



Latihan

Sketsalah grafik fungsi f yang diberikan dengan persamaan

$$z = f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$$

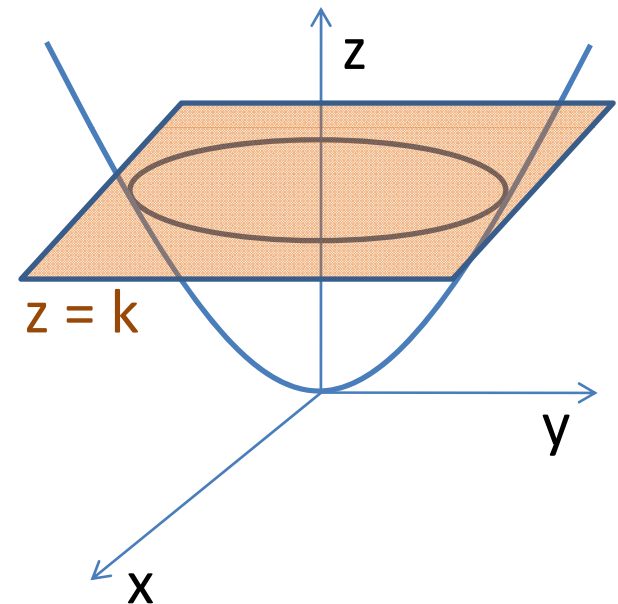
Kurva Ketinggian dan Peta Kontur

Kadang kita dapat mempelajari fungsi dua peubah f melalui **kurva-kurva ketinggian**-nya, yakni kurva-kurva perpotongan permukaan $z = f(x,y)$ dengan bidang $z = k$.

Bila kita gambar kurva-kurva ketinggian ini pada bidang \mathbf{R}^2 , maka akan kita peroleh **peta kontur** f .

Contoh:

$$z = f(x,y) := x^2 + y^2$$



Kurva ketinggian: $x^2 + y^2 = k$
(bila $k \geq 0$)

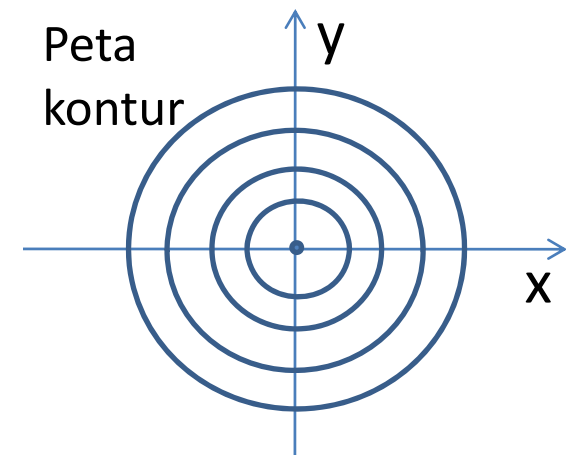
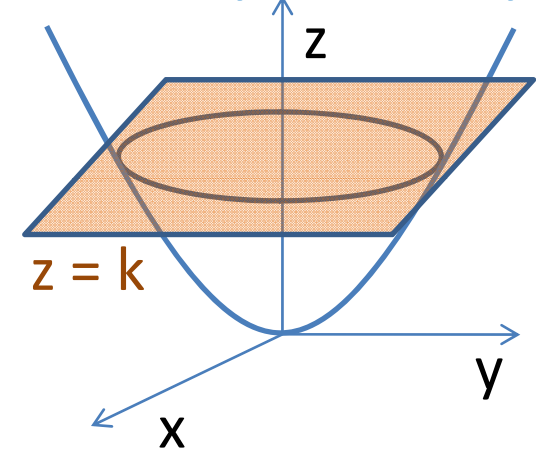
Kurva Ketinggian dan Peta Kontur

Kadang kita dapat mempelajari fungsi dua peubah f melalui **kurva-kurva ketinggian**-nya, yakni kurva-kurva perpotongan permukaan $z = f(x,y)$ dengan bidang $z = k$.

Bila kita gambar kurva-kurva ketinggian ini pada bidang \mathbf{R}^2 , maka akan kita peroleh **peta kontur** f .

Contoh:

$$z = f(x,y) := x^2 + y^2$$



Latihan

Tentukan persamaan kurva ketinggian fungsi $z = f(x,y) := xy$, untuk ketinggian $k = -2, -1, 0, 1, 2$; kemudian gambarlah peta konturnya.