MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

21 Maret 2014

Kuliah yang Lalu

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

Kuliah Hari Ini

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

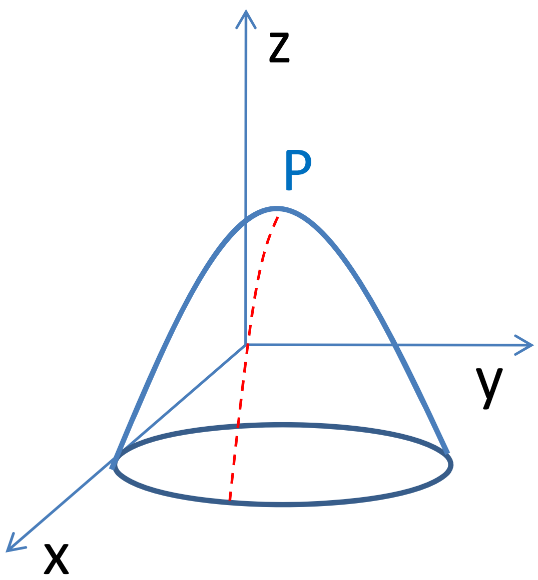
MA1201 MATEMATIKA 2A

12.2 TURUNAN PARSIAL

- Menentukan turunan parsial dari fungsi dua peubah di titik sembarang

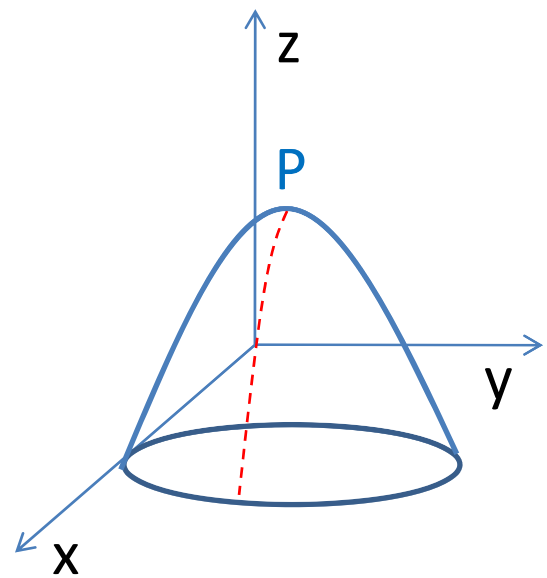
Mengukur Laju Perubahan dalam Arah Sejajar dengan Sumbu-x atau Sumbu-y

Diketahui fungsi dua peubah $z = f(x,y)$, dan bayangkan grafiknya seperti pada gambar di samping. Bila kita berada di suatu titik pada permukaan tsb (bayangkan di titik puncaknya) dan bergerak sejajar dengan sumbu-x, berapakah laju perubahan ketinggiannya?



Turunan Parsial terhadap x

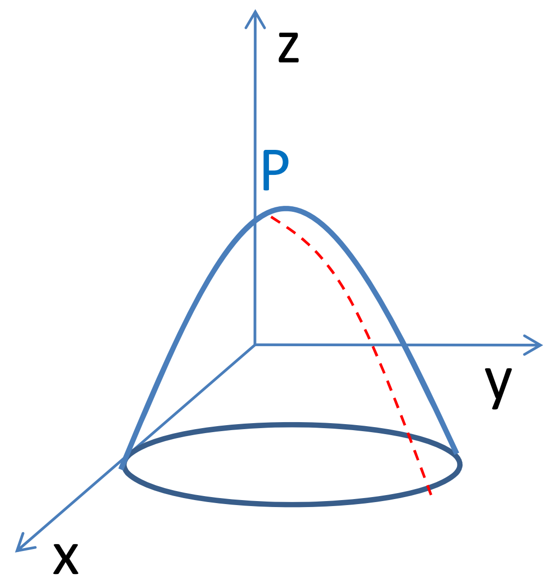
Jika y konstan, katakan $y = y_0$, maka $z = f(x,y_0)$ merupakan fungsi dari x saja. Turunannya di $x = x_0$ disebut sebagai **turunan parsial** dari f **terhadap x** di (x_0,y_0) dan dilambangkan dengan $f_x(x_0,y_0)$.



$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

Turunan Parsial terhadap y

Jika x konstan, katakan $x = x_0$, maka $z = f(x_0,y)$ merupakan fungsi dari y saja. Turunannya di $y = y_0$ disebut sebagai **turunan parsial** dari f **terhadap y** di (x_0,y_0) dan dilambangkan dengan $f_y(x_0,y_0)$.



$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Contoh

Diketahui $z = f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Maka,

$$f_x(x,y) = -2x; \;\; f_y(x,y) = -2y.$$

Di titik $(3,4)$,

$$f_x(3,4) = -6; \;\; f_y(3,4) = -8.$$

Jadi, nilai f turun lebih cepat dalam arah sejajar sumbu-y daripada dalam arah sejajar sumbu-x.

Turunan Parsial Kedua

Turunan parsial kedua suatu fungsi dua peubah dapat diperoleh dari turunan parsial pertamanya.

Karena ada dua turunan parsial pertama, f_x dan f_y, dan masing-masing mempunyai dua turunan parsial, maka kita akan mendapatkan *empat* turunan parsial kedua, yaitu

$$f_{xx} = (f_x)_x, \quad f_{xy} = (f_x)_y, \quad f_{yx} = (f_y)_x, \quad f_{yy} = (f_y)_y$$

Contoh

Diketahui $z = f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.

Turunan parsial pertamanya adalah

$$f_x(x,y) = -2x; \quad f_y(x,y) = -2y.$$

Turunan parsial keduanya adalah

$$f_{xx}(x,y) = -2; \quad f_{xy}(x,y) = 0.$$

$$f_{yx}(x,y) = 0; \quad f_{yy}(x,y) = -2.$$

Catatan. f_{xy} dan f_{yx} disebut sebagai **turunan parsial campuran**. Secara umum, $f_{xy} \neq f_{yx}$.

Soal

Diketahui fungsi dua peubah

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

(a) Tentukan turunan parsial pertamanya.

(b) Tentukan turunan parsial keduanya dan periksa apakah kedua turunan parsial campurannya sama.

Fungsi Harmonik

Fungsi $z = f(x,y)$ disebut fungsi **harmonik** bila memenuhi persamaan Laplace: $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

Buktikan bahwa kedua fungsi berikut harmonik:

1. $f(x,y) = x^3y - xy^3$.
2. $F(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

MA1201 MATEMATIKA 2A

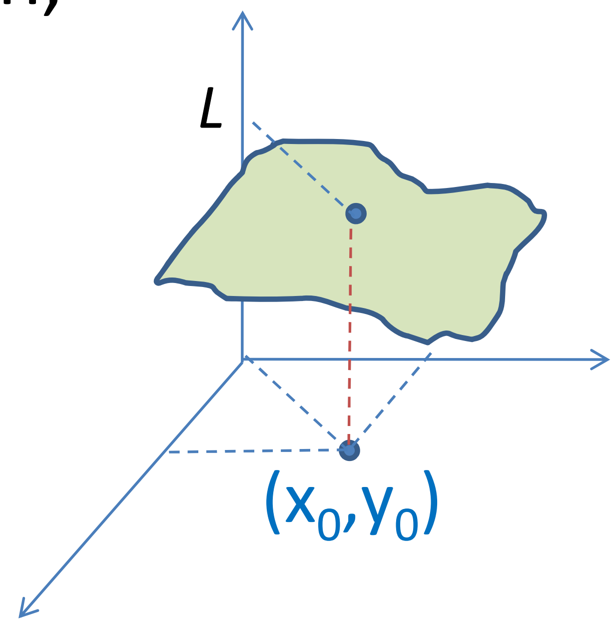
12.3 LIMIT DAN KEKONTINUAN

- Memeriksa apakah suatu fungsi dua peubah mempunyai limit di titik tertentu dan menentukan limitnya (bila ada)
- Memeriksa kekontinuan fungsi dua peubah di titik tertentu

Limit Fungsi Dua Peubah

Diberikan suatu fungsi dua peubah, sebutlah $z = f(x,y)$.

Bila (x,y) mendekati (x_0,y_0), apa yang terjadi dengan $f(x,y)$?

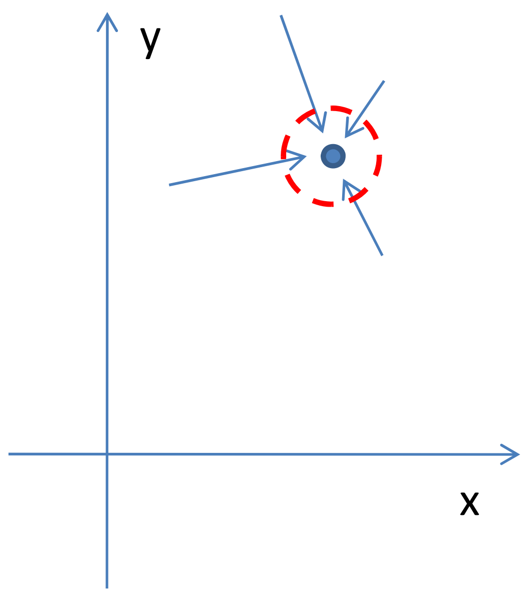


<u>Def.</u> $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < \left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\| < \delta \Rightarrow \left|f(x,y)-L\right| < \varepsilon.$$

Beberapa Catatan

- Limit *f* di (x_0,y_0) sama dengan L apabila untuk setiap (x,y) yang berada **dalam radius δ** dari (x_0,y_0), kecuali mungkin (x_0,y_0) sendiri, nilai *f*(x,y) berada dalam radius ε dari L.
- Dalam hal ini, nilai *f*(x,y) harus menuju L, bagaimanapun caranya (x,y) mendekati (x_0,y_0).
- Jika melalui lintasan berbeda *f* menuju nilai yang berbeda, maka *f* tidak mempunyai limit di (x_0,y_0).



Teorema Substitusi

Jika $f(x,y)$ merupakan polinom dalam x dan y, yakni

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}c_{ij}x^i y^j,$$

maka

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)= f(a,b).$$

Jika $f(x,y) = p(x,y)/q(x,y)$ dengan p dan q polinom dalam x dan y, maka

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\frac{p(a,b)}{q(a,b)},$$

asalkan $q(a,b) \neq 0$.

Contoh

1. $$\lim_{(x,y)\to(3,4)} (x^2 + y^2) = 3^2 + 4^2 = 25.$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+xy}{x^2+y^2}$$ tidak ada, karena pembilangnya menuju 1 sementara penyebutnya menuju 0.

Contoh

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ tidak ada, karena alasan sebagai berikut:

Sepanjang garis $y = mx$, kita amati bahwa

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

yang bergantung pada nilai m. Jadi tidak ada nilai tertentu yang dituju ketika (x,y) mendekati $(0,0)$.

Soal

Selidiki apakah limit berikut ada/tidak ada.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

Kekontinuan

Fungsi $f(x,y)$ dikatakan **kontinu** di (a,b) apabila

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Sebagai contoh, polinom kontinu di setiap titik.

Teorema: Jika $g(x,y)$ kontinu di (a,b) dan $f(t)$ kontinu di $g(a,b)$, maka $f \circ g$ kontinu di (a,b).

Sebagai contoh, $f(x,y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ kontinu di setiap titik (x,y).

Kesamaan Turunan Parsial Campuran

Jika f_{xy} dan f_{yx} kontinu pada suatu cakram di sekitar (a,b), maka $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

Contoh fungsi yang turunan parsial campuran-nya tidak sama diberikan di buku Purcell (Soal 12.3 no. 42). Lihat *slide* berikut... →

Soal

Diketahui

$$f(x,y) := xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

$$:= 0, \qquad (x,y) = (0,0).$$

Hitung $f_{xy}(0,0)$ dan $f_{yx}(0,0)$. Apakah hasilnya sama?