13. INTEGRAL RIEMANN

13.1 Jumlah Riemann Atas dan Jumlah Riemann Bawah

Pada Bab 12 kita mengasumsikan bahwa f kontinu pada $[a,b]$ dan mendefinisikan integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sebagai supremum dari himpunan semua jumlah luas daerah persegi-panjang kecil di bawah kurva $y = f(x)$. Sesungguhnya, kita dapat pula mendefinisikan integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sebagai infimum dari himpunan semua jumlah luas daerah persegi-panjang kecil 'di atas' kurva $y = f(x)$. Dalam hal f kontinu pada $[a,b]$, kedua definisi tersebut akan menghasilkan nilai yang sama.

Pada bab ini, kita akan memperluas definisi integral untuk fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ yang terbatas, sebagaimana yang dilakukan oleh Bernhard Riemann pada 1850-an.

Seperti pada Sub-bab 12.2, diberikan sembarang partisi $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dari $[a,b]$, kita dapat mendefinisikan

$$L(P,f) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}).$$

dengan $m_k := \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x),\ k = 1, 2, \dots, n$. Pada saat yang sama, kita juga dapat mendefinisikan

$$U(P,f) := \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

dengan $M_k := \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x),\ k = 1, 2, \dots, n$.

$L(P,f)$ dan $U(P,f)$ disebut sebagai *jumlah Riemann bawah* dan *jumlah Riemann atas* dari f yang berkaitan dengan partisi P. Perhatikan bahwa

$$L(P,f) \le U(P,f)$$

untuk sembarang partisi P.

Selanjutnya, jika $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dan $Q := \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ adalah partisi dari $[a, b]$, maka Q disebut sebagai suatu *perhalusan* dari P apabila setiap titik partisi $x_k \in P$ merupakan titik partisi di Q, yakni $P \subseteq Q$. Dalam hal ini, setiap sub-interval yang terkait dengan partisi P dapat dinyatakan sebagai gabungan dari beberapa sub-interval yang terkait dengan partisi Q, yakni

$$[x_{k-1}, x_k] = [y_{i-1}, y_i] \cup [y_i, y_{i+1}] \cup \cdots \cup [y_{j-1}, y_j].$$

Catat bahwa kita dapat memperoleh suatu perhalusan dari sembarang partisi P dengan menambahkan sejumlah titik ke P.

Proposisi 1. *Jika Q merupakan perhalusan dari P, maka $L(P, f) \le L(Q, f)$ dan $U(Q, f) \le U(P, f)$.*

Akibat 2. *Jika P_1 dan P_2 adalah dua partisi sembarang dari $[a, b]$, maka $L(P_1, f) \le U(P_2, f)$.*

Soal Latihan

1. Buktikan Proposisi 1. (*Petunjuk*. Mulai dengan kasus $Q = P \cup \{x^*\}$ dengan $x^* \notin P$.)

2. Buktikan Akibat 2.

13.2 Integral Riemann

Seperti pada sub-bab 13.1, pada sub-bab ini kita mengasumsikan bahwa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terbatas. Menurut Akibat 2, himpunan $\{L(P, f) : P \text{ partisi dari } [a, b]\}$ terbatas di atas (oleh suatu jumlah Riemann atas), sementara himpunan $\{U(P, f) : P \text{ partisi dari } [a, b]\}$ terbatas di bawah (oleh suatu jumlah Riemann bawah). Karena itu kita dapat mendefinisikan

$$L(f) := \sup\{L(P, f) : P \text{ partisi dari } [a, b]\}$$

dan

$$U(f) := \inf\{U(P, f) : P \text{ partisi dari } [a, b]\}.$$

$L(f)$ disebut sebagai *integral Riemann atas* dari f, sementara $U(f)$ disebut sebagai *integral Riemann bawah* dari f.

Proposisi 3. $L(f) \leq U(f)$.

Bukti. Untuk setiap partisi P_0 dari $[a, b]$, $U(P_0, f)$ merupakan batas atas dari $\{L(P, f) : P \text{ partisi dari } [a, b]\}$, sehingga

$$L(f) = \sup\{L(P, f) : P \text{ partisi dari } [a, b]\} \leq U(P_0, f).$$

Karena ini berlaku untuk sembarang partisi P_0, maka $L(f)$ merupakan batas bawah dari $\{U(P_0, f) : P_0 \text{ partisi dari } [a, b]\}$. Akibatnya

$$L(f) \leq \inf\{U(P_0, f) : P_0 \text{ partisi dari } [a, b]\} = U(f),$$

sebagaimana yang diharapkan. □

Secara umum, $L(f) \neq U(f)$. Sebagai contoh, jika $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ rasional;} \\ 1, & x \text{ irasional,} \end{cases}$$

maka $L(f) = 0$ sementara $U(f) = 1$.

Jika $L(f) = U(f)$, maka f dikatakan *terintegralkan Riemann* dan nilai yang sama tersebut didefinisikan sebagai *integral Riemann* dari f pada $[a, b]$, yang dilambangkan dengan $\int_a^b f(x)\,dx$. (Seperti pada Bab 12, kita definisikan $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ dan $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.)

Sebagai contoh, jika f bernilai konstan pada $[a, b]$, katakan $f(x) = c$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka $L(f) = U(f) = c(b - a)$ dan karenanya f terintegralkan Riemann pada $[a, b]$ dengan

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b - a).$$

Teorema berikut memberikan suatu kriteria untuk keterintegralan f pada $[a, b]$. (Untuk selanjutnya, 'terintegralkan' berarti 'terintegralkan Riemann' dan 'integral' berarti 'integral Riemann'.)

Teorema 6. *f terintegralkan pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat suatu partisi P_ϵ dari $[a, b]$ sedemikian sehingga*

$$U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon.$$

Bukti. Misalkan f terintegralkan pada $[a, b]$. Ambil $\epsilon > 0$ sembarang. Dari definisi supremum, terdapat suatu partisi P_1 dari $[a, b]$ sehingga

$$L(f) - \frac{\epsilon}{2} < L(P_1, f).$$

Dari definisi infimum, terdapat pula suatu partisi P_2 dari $[a, b]$ sehingga

$$U(P_2, f) < U(f) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Sekarang misalkan $P_\epsilon = P_1 \cup P_2$. Maka P_ϵ merupakan perhalusan dari P_1 dan P_2. Akibatnya,

$$L(f) - \frac{\epsilon}{2} < L(P_1, f) \leq L(P_\epsilon, f) \leq U(P_\epsilon, f) \leq U(P_2, f) < U(f) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Namun $L(f) = U(f)$, sehingga kita peroleh

$$U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon.$$

Sebaliknya misalkan untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat suatu partisi P_ϵ dari $[a, b]$ sedemikian sehingga

$$U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon.$$

Maka, untuk setiap $\epsilon > 0$, berlaku

$$0 \leq U(f) - L(f) \leq U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon.$$

Dari sini kita simpulkan bahwa $U(f) = L(f)$ atau f terintegralkan pada $[a, b]$. □

Akibat 7. *Misalkan terdapat barisan partisi $\langle P_n \rangle$ dari $[a, b]$ sedemikian sehingga*

$$\lim_{n\to\infty} [U(P_n, f) - L(Pn, f)] = 0.$$

Maka f terintegralkan pada $[a, b]$ dan

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f).$$

Soal Latihan

1. Buktikan Akibat 7.

2. Misalkan $f(x) = x,\ x \in [0,1]$, dan $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\},\ n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} [U(P_n, f) - L(P_n, f)] = 0$, dan kemudian simpulkan bahwa f terintegralkan pada $[0,1]$.

3. Misalkan fungsi f didefinisikan pada $[0,1]$ sebagai
$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$
Buktikan bahwa f terintegralkan pada $[0,1]$ dengan $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

4. Misalkan fungsi f didefinisikan pada $[0,2]$ sebagai
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1; \\ 2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$
Buktikan bahwa f terintegralkan pada $[0,2]$ dengan $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$.

13.3 Keterintegralan Fungsi Kontinu dan Fungsi Monoton

Sebagaimana disinggung pada awal bab ini, fungsi yang kontinu pasti terintegralkan.

Teorema 8. *Jika f kontinu pada $[a,b]$, maka f terintegralkan pada $[a,b]$.*

Bukti. Menurut Teorema 18 pada Bab 8, fungsi yang kontinu pada $[a,b]$ mestilah kontinu seragam pada $[a,b]$. Karena itu, diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk $x, y \in [a,b]$ dengan $|x - y| < \delta$ berlaku
$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$
Selanjutnya, untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n > \frac{b-a}{\delta}$, tinjau partisi $P_n := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dengan $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n},\ k = 0, 1, \dots, n$. (Di sini, interval $[a,b]$ terbagi menjadi n sub-interval sama panjang.)

Menurut Teorema 13 pada Bab 8, pada setiap sub-interval $[x_{k-1}, x_k]$, f mencapai nilai maksimum M_k dan minimum m_k, katakanlah
$$f(u_k) = M_k \quad \text{dan} \quad f(v_k) = m_k.$$

Dalam hal ini kita peroleh

$$M_k - m_k = f(u_k) - f(v_k) < \frac{\epsilon}{b-a},$$

dan akibatnya

$$0 \le U(P_n, f) - L(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} = \epsilon.$$

Dari sini kita simpulkan bahwa $\lim_{n\to\infty} [U(P_n, f) - L(P_n, f)] = 0$, dan karenanya f terintegralkan pada $[a, b]$. $\square$

Selain fungsi kontinu, teorema berikut menyatakan bahwa fungsi monoton juga terintegralkan.

Teorema 9. *Jika f monoton pada $[a, b]$, maka f terintegralkan pada $[a, b]$.*

Bukti. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan f naik pada $[a, b]$. Untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, tinjau partisi $P_n := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dengan $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Karena f naik pada $[x_{k-1}, x_k]$, maka $m_k = f(x_{k-1})$ dan $M_k = f(x_k)$. Dalam hal ini kita peroleh suatu deret teleskopis

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)].$$

Sekarang, jika $\epsilon > 0$ diberikan, maka untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n > \frac{b-a}{\epsilon}[f(b) - f(a)]$ berlaku

$$0 \le U(P_n, f) - L(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \epsilon.$$

Dengan demikian f mestilah terintegralkan pada $[a, b]$. $\square$

Soal Latihan

1. Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu dan $f(x) \ge 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Buktikan jika $L(f) = 0$, maka $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

2. Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu dan, untuk setiap fungsi $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ yang terintegralkan, fg terintegralkan dan $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. Buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.