14. SIFAT-SIFAT INTEGRAL RIEMANN

14.1 Sifat-sifat Dasar Integral Riemann

Pada bab ini kita akan mempelajari sifat-sifat dasar integral Riemann. Sifat pertama adalah sifat kelinearan, yang dinyatakan dalam Proposisi 1. Sepanjang bab ini, I menyatakan interval $[a, b]$, kecuali bila kita nyatakan lain.

Proposisi 1. *Misalkan $f, g : I \to \mathbb{R}$ terintegralkan pada I, dan $c \in \mathbb{R}$ suatu konstanta. Maka cf dan $f + g$ terintegralkan pada I dan*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{2}$$

Bukti. (1) Jika $c = 0$, maka pernyataan tentang cf jelas benar. Sekarang tinjau kasus $c > 0$. (Kasus $c < 0$ serupa dan diserahkan sebagai latihan). Misalkan $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partisi sembarang dari I. Karena $c > 0$, kita mempunyai

$$\inf\{cf(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = c\inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

untuk $k = 1, 2, \dots, n$. Kalikan tiap suku ini dengan $x_k - x_{k-1}$ dan jumlahkan, kita dapatkan

$$L(P, cf) = cL(P, f).$$

Jadi, karena $c > 0$, kita peroleh

$$L(cf) = \sup\{cL(P, f) : P \text{ partisi dari } I\} = c\sup\{L(P, f) : P \text{ partisi dari } I\} = cL(f).$$

Dengan cara yang serupa kita peroleh pula $U(P, cf) = cU(P, f)$ dan

$$U(cf) = \inf\{cU(P, f) : P \text{ partisi dari } I\} = c\inf\{U(P, f) : P \text{ partisi dari } I\} = cU(f).$$

Karena f terintegralkan, $U(f) = L(f)$ dan akibatnya

$$L(cf) = cL(f) = cU(f) = U(cf).$$

Jadi cf terintegralkan dan

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

(2) Untuk sembarang interval $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, kita mempunyai

$$\inf\{f(x) : x \in I_k\} + \inf\{g(x) : x \in I_k\} \le \inf\{(f+g)(x) : x \in I_k\},$$

$$\sup\{(f+g)(x) : x \in I_k\} \le \sup\{f(x) : x \in I_k\} + \sup\{g(x) : x \in I_k\}.$$

Dari sini kita peroleh

$$L(P, f) + L(P, g) \le L(P, f+g)$$

dan

$$U(P, f+g) \le U(P, f) + U(P, g)$$

untuk sembarang partisi P dari I. Sekarang, jika $\epsilon > 0$ diberikan, maka terdapat partisi $P_{f,\epsilon}$ dan $P_{g,\epsilon}$ sedemikian sehingga

$$U(P_{f,\epsilon}, f) \le L(P_{f,\epsilon}, f) + \frac{\epsilon}{2}$$

dan

$$U(P_{g,\epsilon}, g) \le L(P_{g,\epsilon}, g) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Akibatnya, untuk $P_\epsilon := P_{f,\epsilon} \cup P_{g,\epsilon}$, kita peroleh

$$U(P_\epsilon, f+g) \le U(P_\epsilon, f) + U(P_\epsilon, g) \le L(P_\epsilon, f) + L(P_\epsilon, g) + \epsilon \le L(P_\epsilon, f+g) + \epsilon.$$

Menurut Kriteria Keterintegralan Riemann, $f + g$ terintegralkan.

Selanjutnya perhatikan bahwa dari ketaksamaan di atas, kita peroleh

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx \le U(P_\epsilon, f+g) \le L(P_\epsilon, f) + L(P_\epsilon, g) + \epsilon \le \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \epsilon.$$

Sementara itu,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \le U(P_\epsilon, f) + U(P_\epsilon, g) \le L(P_\epsilon, f+g) + \epsilon \le \int_a^b (f+g)(x)\,dx + \epsilon.$$

Dari kedua ketaksamaan ini, kita peroleh

$$\Big|\int_a^b (f+g)(x)\,dx - \Big(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\Big)\Big| < \epsilon.$$

Karena ini berlaku untuk $\epsilon > 0$ sembarang, kita simpulkan bahwa

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

dan bukti pun selesai. □

Proposisi berikut dikenal sebagai sifat kepositifan integral Riemann. (Buktinya diserahkan sebagai latihan.)

Proposisi 2. *Misalkan $f : I \to \mathbb{R}$ terintegralkan pada I. Jika $f(x) \geq 0$ untuk tiap $x \in I$, maka $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.*

Akibat 3. *Misalkan $f, g : I \to \mathbb{R}$ terintegralkan pada I. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk tiap $x \in I$, maka $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.*

Proposisi 3. *Misalkan $f : I \to \mathbb{R}$ terintegralkan pada I. Jika $m \leq f(x) \leq M$ untuk tiap $x \in [a,b]$, maka*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Proposisi 4. *Misalkan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ terbatas dan $a < c < b$. Maka, f terintegralkan pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f terintegralkan pada $[a,c]$ dan pada $[c,b]$. Dalam hal ini,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

`Catatan`. Bukti Proposisi 4 tidak dibahas di sini; lihat [1] bila ingin mempelajarinya.

Soal Latihan

1. Buktikan Proposisi 1 bagian (1) untuk kasus $c < 0$.

2. Buktikan Proposisi 2 dan Akibat 3.

3. Buktikan Proposisi 3.

4. Buktikan jika f terintegralkan pada I dan $|f(x)| \le K$ untuk tiap $x \in I$, maka $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le K|b-a|$.

14.2 Teorema Dasar Kalkulus untuk Integral Riemann

Analog dengan Teorema Dasar Kalkulus I (Teorema 5 pada Sub-bab 12.3) untuk integral dari fungsi kontinu, kita mempunyai hasil berikut untuk integral Riemann dari fungsi terbatas.

Teorema 5 (Teorema Dasar Kalkulus I). *Misalkan f terbatas pada $I = [a,b]$ dan F didefinisikan pada I sebagai*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I.$$

Maka, F kontinu pada I. Selanjutnya, jika f kontinu di $c \in (a,b)$, maka F mempunyai turunan di c dan $F'(c) = f(c)$.

Demikian pula kita mempunyai Teorema Dasar Kalkulus II untuk integral Riemann, yang dapat dibuktikan tanpa menggunakan Teorema Dasar Kalkulus I melainkan dengan menggunakan Kriteria Keterintegralan Riemann.

Teorema 6 (Teorema Dasar Kalkulus II). *Misalkan f terintegralkan pada $I = [a,b]$. Jika $F : I \to \mathbb{R}$ adalah anti-turunan dari f pada I, maka*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Bukti. Diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, pilih partisi $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dari I sedemikian sehingga

$$U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

Menurut Teorema Nilai Rata-rata (yang kita terapkan pada F), pada tiap interval $[x_{k-1}, x_k]$ terdapat titik $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ sedemikian sehingga

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) f(t_k).$$

Misalkan m_k dan M_k adalah infimum dan supremum dari f pada $[x_{k-1}, x_k]$. Maka

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \le F(x_k) - F(x_{k-1}) \le M_k(x_k - x_{k-1})$$

untuk tiap $k = 1, 2, \ldots, n$. Perhatikan bahwa bila kita jumlahkan suku-suku di tengah, maka kita peroleh suatu deret teleskopis yang jumlahnya sama dengan $F(b) - F(a)$. Karena itu, kita peroleh

$$L(P, f) \leq F(b) - F(a) \leq U(P, f).$$

Namun, kita juga mempunyai

$$L(P, f) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq U(P, f).$$

Akibatnya, kita peroleh

$$\Big| \int_a^b f(t)\, dt - [F(b) - F(a)] \Big| < \epsilon.$$

Karena ini berlaku untuk $\epsilon > 0$ sembarang, kita simpulkan bahwa

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a),$$

sebagaimana yang kita kehendaki. □

Soal Latihan

1. Misalkan $f(x) = |x|,\ x \in [-1, 1]$. Terkait dengan f, definisikan

$$F(x) := \int_1^x f(t)\, dt, \quad x \in [-1, 1].$$

   (a) Peroleh rumus untuk $F(x),\ x \in [-1, 1]$.

   (b) Periksa bahwa $F'(x) = f(x)$ untuk $x \in [-1, 1]$.

   (c) Periksa bahwa $\int_{-1}^1 f(t)\, dt = F(1) - F(-1)$.

2. Misalkan $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

   Terkait dengan f, definisikan

$$F(x) := \int_1^x f(t)\, dt, \quad x \in [-1, 1].$$

(a) Peroleh rumus untuk $F(x)$. Apakah F kontinu pada $[-1,1]$?

(b) Tunjukkan bahwa $F'(x) = f(x)$ untuk $x \in [-1,1],\ x \neq 0$.

(c) Periksa apakah $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = F(1) - F(-1)$. Berikan argumen yang mendukung fakta tersebut.

3. Misalkan f dan g terintegralkan dan mempunyai anti- turunan F dan G pada $I = [a,b]$. Buktikan bahwa

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = [F(b)G(b) - F(a)G(a)] - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

(`Catatan`. Hasil ini dikenal sebagai *teknik pengintegralan parsial*.)

14.3 Teorema Nilai Rata-rata dan Teorema Taylor untuk Integral

Jika f kontinu pada $I = [a,b]$, maka (menurut Teorema 9 pada Bab 8) f akan mencapai nilai maksimum M dan minimum m pada $[a,b]$. Menurut Proposisi 3, kita mempunyai

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

atau

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Nilai $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ disebut sebagai *nilai rata-rata integral* f pada interval I. (Dalam versi diskrit, nilai rata-rata aritmetik dari sejumlah bilangan adalah jumlah dari bilangan-bilangan tersebut dibagi dengan banyaknya bilangan itu. Dalam versi 'kontinum', integral menggantikan jumlah dan panjang interval menggantikan banyaknya bilangan.)

Mengingat m dan M ada di daerah nilai f dan $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ada di antara kedua nilai tersebut, maka menurut Teorema Nilai Antara mestilah terdapat suatu titik $c \in I$ sedemikian sehingga

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Fakta ini dikenal sebagai *Teorema Nilai Rata-rata* untuk integral, yang dinyatakan di bawah ini. (Ingat bahwa sebelumnya kita juga mempunyai Teorema Nilai Rata-rata untuk turunan. Dalam konteks turunan, nilai rata-rata analog dengan 'kecepatan rata-rata' dalam fisika.)

Teorema 7 (Teorema Nilai Rata-rata untuk Integral). *Jika f kontinu pada $I = [a, b]$, maka terdapat $c \in I$ sedemikian sehingga*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Pada Bab 10, kita telah membahas Teorema Taylor untuk turunan. Sekarang kita akan membahas teorema yang serupa untuk integral.

Teorema 8 (Teorema Taylos untuk Integral). *Misalkan $f, f', \dots, f^{(n)}$ kontinu pada $I = [a, b]$. Maka*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + E_n$$

dengan $E_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$.

Bukti. Dengan pengintegralan parsial, kita peroleh

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{(n-1)!} \Big[(b-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t)\big|_a^b + (n-1) \int_a^b (b-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)\,dt \Big] \\ &= -\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Jika kita lakukan pengintegralan parsial hingga n kali, maka kita akan sampai pada hasil di atas. □

Soal Latihan

1. Buktikan jika f kontinu pada $I = [a, b]$ dan $f(x) \geq 0$ untuk tiap $x \in I$, maka terdapat $c \in I$ sedemikian sehingga

$$f(c) = \Big[\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)\,dx \Big]^{1/2}.$$

2. Buktikan jika f kontinu pada $I = [a, b]$ dan $f(x) \geq 0$ untuk tiap $x \in I$, maka untuk sembarang $k \in \mathbb{N}$ terdapat $c = c_k \in I$ sedemikian sehingga

$$f(c) = \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f^k(x)\,dx\right]^{1/k}.$$

3. Misalkan f dan g adalah fungsi yang kontinu pada $I = [a, b]$ sedemikian sehingga

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Buktikan bahwa terdapat $c \in I$ sedemikian sehingga $f(c) = g(c)$.