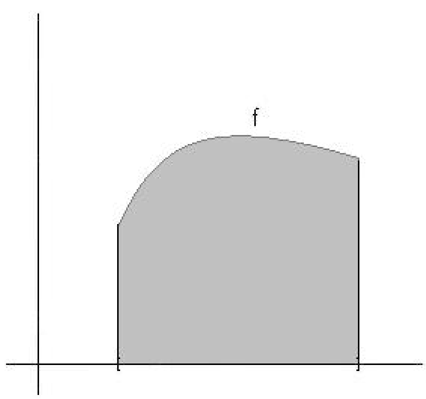
12. LUAS DAERAH DAN INTEGRAL

12.1 Luas Daerah di Bawah Kurva

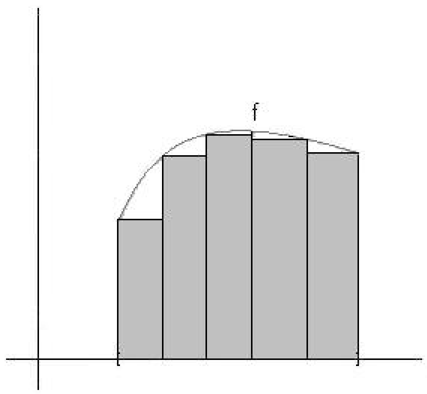
Masalah menentukan luas daerah (dan volume ruang) telah dipelajari sejak era Pythagoras dan Zeno, pada tahun 500-an SM. Konsep integral (yang terkait erat dengan luas daerah) berpijak pada metode 'exhaustion', yang telah dipakai oleh Plato dan Eudoxus, dan kemudian oleh Euclid dan Archimedes, untuk menghitung luas daerah lingkaran.

Pada 1630-an, Pierre de Fermat tertarik untuk menghitung luas daerah di bawah kurva. Misalkan f kontinu pada interval $[a, b]$. Apakah masuk akal untuk membahas 'luas' daerah di bawah kurva $y = f(x)$? Jika ya, bagaimanakah kita menghitungnya?



`Gambar 12.1` Daerah di bawah kurva $y = f(x)$

Jika memang masuk akal untuk membahas luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$, maka luas daerah ini setidaknya mestilah lebih besar daripada L, yang menyatakan luas daerah yang diarsir pada Gambar 12.2 .



`Gambar 12.2` Luas daerah L

Misalkan $\mathcal{L}$ menyatakan himpunan *semua* bilangan L yang dapat diperoleh sebagai jumlah luas daerah persegi-panjang kecil sebagaimana dalam Gambar 12.2. Maka 'luas daerah' di bawah kurva $y = f(x)$ mestilah lebih besar daripada setiap anggota $\mathcal{L}$. Tampaknya masuk akal untuk mendefinisikan 'luas daerah' di bawah kurva $y = f(x)$ sebagai bilangan terkecil yang lebih besar daripada setiap anggota $\mathcal{L}$, yakni $\sup \mathcal{L}$.

Contoh 1. Misalkan $f(x) = x^2, \ x \in [0,1]$. Maka, dengan membagi interval $[0,1]$ atas n interval bagian yang sama panjang dan menghitung jumlah luas daerah persegi-panjang yang terbentuk, luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ mestilah lebih besar daripada

$$\frac{1}{n}\Big[0 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\Big].$$

Jumlah deret ini sama dengan

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

Mengingat $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \le \frac{1}{3}$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ dan

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \to \frac{1}{3}$$

untuk $n \to \infty$, maka bilangan terkecil yang lebih besar daripada $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ adalah $\frac{1}{3}$. Jadi, luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ adalah $\frac{1}{3}$.

Soal Latihan

1. Buktikan bahwa $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \le \frac{1}{3}$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, dan simpulkan bahwa $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$.

2. Tentukan luas daerah di bawah kurva $y = 1 + x,\ x \in [0, 1]$, dengan cara seperti pada Contoh 1. Apakah hasil yang diperoleh sesuai dengan pengetahuan geometri kita?

12.2 Integral

Misalkan f kontinu pada interval $[a, b]$. Definisikan *partisi* dari $[a, b]$ sebagai himpunan $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dengan

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Karena f kontinu pada $[a, b]$, maka f terbatas pada $[a, b]$. Jadi, diberikan sembarang partisi $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dari $[a, b]$, kita dapat mendefinisikan

$$m_k := \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x),$$

untuk $k = 1, 2, \ldots, n$. Dengan demikian, untuk tiap partisi P, kita dapat membentuk deret

$$L(P, f) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}).$$

(Buatlah suatu ilustrasi yang menyatakan nilai $L(P, f)$.)

Misalkan f terbatas di atas pada $[a, b]$, katakanlah

$$f(x) \le M, \qquad x \in [a, b].$$

Maka

$$L(P, f) \le M \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = M(b - a).$$

Jadi himpunan bilangan $\{L(P, f) : P \text{ partisi dari } [a, b]\}$ terbatas di atas oleh $M(b-a)$, dan karena itu ia mempunyai supremum.

Sekarang kita sampai pada definisi integral. Jika f kontinu pada interval $[a, b]$, maka kita definisikan *integral* dari f pada $[a, b]$ sebagai

$$\int_a^b f(x)\, dx := \sup_P L(P, f),$$

dengan nilai supremum diambil atas **semua** partisi P dari $[a, b]$.

Dalam hal $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka $\int_a^b f(x)\, dx$ dapat diinterpretasikan sebagai luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$.

Sebagai tambahan, jika $a < b$, maka kita definisikan

$$\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Selain itu, untuk sembarang $a \in \mathbb{R}$, kita definisikan

$$\int_a^a f(x)\, dx := 0.$$

Proposisi 2. *Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk tiap $x \in [a, b]$. Maka*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a).$$

Proposisi 3. *Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan $a \leq c \leq b$. Maka*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

`Catatan`. Bukti Proposisi 3 agak panjang; lihat [2].

Soal Latihan

1. Buktikan Proposisi 2.
2. Buktikan bahwa $\int_a^b c\, dx = c(b - a)$.
3. Diketahui $f(x) = x,\ x \in [a, b]$. Buktikan bahwa

$$L(P, f) \leq \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

untuk sebarang partisi P dari $[a, b]$. Selanjutnya, dengan menggunakan definisi integral, buktikan bahwa

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

12.3 Turunan dari Integral; Teorema Dasar Kalkulus

Misalkan f terdefinisi pada (a, b). Misalkan F kontinu pada $[a, b]$ dan mempunyai turunan pada (a, b) dengan

$$F'(x) = f(x)$$

untuk tiap $x \in (a, b)$. Maka F disebut sebagai *anti turunan* dari f pada $[a, b]$.

Contoh 4. Jika $f(x) = x^3$, maka fungsi F yang didefinisikan sebagai

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 5$$

merupakan **suatu** anti turunan dari f. Secara umum, fungsi G yang didefinisikan sebagai

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 + C,$$

dengan C konstanta, merupakan anti turunan dari f.

Pembaca mungkin bertanya: apa urusannya anti turunan dengan integral? Untuk menjawab pertanyaan ini, misalkan f kontinu pada $[a, b]$. Definisikan F pada $[a, b]$ sebagai

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b].$$

Dalam teorema berikut, kita akan menunjukkan bahwa F merupakan suatu anti turunan dari f pada $[a, b]$.

Teorema 5 (Teorema Dasar Kalkulus I). *Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan F didefinisikan pada $[a, b]$ sebagai*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b].$$

Maka, F merupakan suatu anti turunan dari f pada $[a,b]$; yakni, F kontinu pada $[a,b]$, mempunyai turunan pada (a,b), dan $F'(x) = f(x)$ untuk tiap $x \in (a,b)$.

Bukti. Karena f kontinu pada $[a,b]$, maka f terbatas pada $[a,b]$, katakanlah

$$|f(t)| \leq \kappa$$

untuk tiap $t \in [a,b]$. Selanjutnya, untuk $x, c \in [a,b]$, kita mempunyai

$$F(x) - F(c) = \int_c^x f(t)\, dt,$$

sehingga

$$|F(x) - F(c)| \leq \kappa |x - c|.$$

Jadi F kontinu pada $[a,b]$.

Selanjutnya perhatikan bahwa untuk $x \neq c$ kita mempunyai

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) = \frac{1}{x - c} \int_c^x [f(t) - f(c)]\, dt.$$

Karena f kontinu di c, kita dapat memilih $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\Big| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \Big| < \epsilon,$$

untuk $0 < |x - c| < \delta$. Ini menunjukkan bahwa $F'(c) = f(c)$, dan ini berlaku untuk setiap $c \in [a,b]$. $\square$

Teorema 6 (Teorema Dasar Kalkulus II). *Setiap fungsi f yang kontinu pada $[a,b]$ mempunyai anti turunan pada $[a,b]$. Jika G adalah anti turunan dari f pada $[a,b]$, maka*

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a).$$

Bukti. Definisikan fungsi F pada $[a,b]$ sebagai

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a,b].$$

Maka, F merupakan suatu anti turunan dari f pada $[a,b]$, dan

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) = F(b) - F(a).$$

Sekarang, jika G adalah anti turunan dari f pada $[a, b]$, maka

$$G(x) = F(x) + C, \quad x \in [a, b],$$

suatu konstanta C. Karena itu,

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(b) + C] - [F(a) + C] = G(b) - G(a),$$

sebagaimana yang kita harapkan. $\square$

Soal Latihan

1. Buktikan bahwa $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.
2. Misalkan $r \in \mathbb{Q},\ r \neq -1$. Buktikan bahwa $\int_0^1 x^r dx = \frac{1}{r+1}$.
3. Misalkan f dan g kontinu pada $[a, b]$. Buktikan, dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus II, bahwa untuk setiap $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, berlaku
$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$
4. Misalkan f dan g kontinu pada $[a, b]$. Buktikan Ketaksamaan Cauchy-Schwarz:
$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2 dx.$$