15. INTEGRAL SEBAGAI LIMIT

15.1 Jumlah Riemann

Dalam kuliah Kalkulus pada tahun pertama, integral Riemann biasanya diperkenalkan sebagai limit dari 'jumlah Riemann', tidak melalui integral Riemann atas dan integral Riemann bawah. Hal ini memang dimungkinkan, karena nilai limit dari jumlah Riemann tersebut sama dengan integral Riemann yang kita bahas pada Bab 13.

Seperti pada bab sebelumnya, sepanjang bab ini I menyatakan interval $[a, b]$, kecuali bila kita nyatakan lain. Misalkan $f : I \to \mathbb{R}$ terbatas dan $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ partisi dari I. Jika t_k adalah bilangan sedemikian sehingga $x_{k-1} \le t_k \le x_k$ untuk $k = 1, 2, \ldots, n$, maka jumlah

$$S(P, f) := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

disebut sebagai suatu *jumlah Riemann* untuk f, yang terkait dengan partisi P dan *titik-titik sampel* t_k.

Catat bahwa untuk sebuah partisi P terdapat tak terhitung banyaknya cara memilih titik-titik sampel t_k, dan karenanya terdapat tak terhitung banyaknya jumlah Riemann yang terkait dengan partisi P.

Untuk fungsi $f \ge 0$ pada I, jumlah Riemann dapat diinterpretasikan sebagai jumlah luas daerah persegipanjang dengan lebar $x_k - x_{k-1}$ dan tinggi $f(t_k)$. Jika partisi P cukup halus, maka masuk akal untuk mengharapkan bahwa jumlah Riemann $S(P, f)$ akan menghampiri luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$. Dalam hal ini, nilai $S(P, f)$ mestilah cukup dekat ke nilai integral dari f pada I, bila f terintegralkan pada I.

Perhatikan bahwa untuk sembarang partisi P dari I dan untuk sembarang pemilihan titik sampel $t_k \in I_k := [x_{k-1}, x_k]$, kita mempunyai

$$m_k \le f(t_k) \le M_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

dengan $m_k := \inf f(I_k)$ dan $M_k := \sup f(I_k)$. Akibatnya,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

yakni

$$L(P, f) \le S(P, f) \le U(P, f).$$

Jadi, jumlah Riemann untuk f senantiasa bernilai di antara jumlah Riemann bawah dan jumlah Riemann atas, terlepas dari bagaimana caranya kita memilih titik-titik sampel t_k.

Catat khususnya jika batas bawah m_k dan batas atas M_k tercapai oleh f pada $[x_{k-1}, x_k]$ untuk tiap $k = 1, 2, \dots, n$, maka jumlah Riemann bawah dan jumlah Riemann atas sama dengan jumlah Riemann untuk titik-titik sampel tertentu. Secara umum, jumlah Riemann bawah maupun atas bukan jumlah Riemann (karena nilai m_k dan M_k tidak harus tercapai oleh f). Namun demikian, dengan memilih titik-titik sampel secara cermat, kita dapat memperoleh jumlah Riemann yang cukup dekat ke jumlah Riemann bawah atau ke jumlah Riemann atas.

Soal Latihan

1. Misalkan $f(x) = x,\ x \in [0, b]$. Untuk sembarang partisi $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dari $[0, b]$, pilih titik-titik sampel $t_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$. Hitunglah jumlah Riemann $S(P, f)$ dengan titik-titik sampel ini.

2. Misalkan $f : I \to \mathbb{R}$ terbatas, $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partisi dari I, dan $\epsilon > 0$ sembarang.

   (a) Tentukan titik-titik sampel t_k sedemikian sehingga

   $$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) - L(P, f) < \epsilon.$$

   (b) Tentukan titik-titik sampel t_k sedemikian sehingga

   $$U(P, f) - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) < \epsilon.$$

15.2 Integral sebagai Limit

Di sini kita akan melihat bahwa $\int_a^b f(x)\,dx$ dapat dipandang sebagai 'limit' dari jumlah Riemann $S(P,f)$, dalam arti tertentu.

Teorema 1. *Misalkan f terintegralkan pada I. Maka, untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat suatu partisi P_ϵ dari I sedemikian sehingga untuk sembarang partisi $P \supseteq P_\epsilon$ dan sembarang jumlah Riemann $S(P,f)$ berlaku*

$$\left|S(P,f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \epsilon.$$

Bukti. Diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, pilih partisi P_ϵ dari I sedemikian sehingga

$$U(P_\epsilon,f) - L(P_\epsilon,f) < \epsilon.$$

Selanjutnya ambil sembarang partisi $P \supseteq P_\epsilon$. Maka, menurut Proposisi 1 pada Subbab 13.1, kita mempunyai

$$L(P_\epsilon,f) \le L(P,f) \le U(P,f) \le U(P_\epsilon,f).$$

Akibatnya,

$$U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

Sekarang misalkan $S(P,f)$ adalah sembarang jumlah Riemann yang terkait dengan P. Maka,

$$L(P,f) \le S(P,f) \le U(P,f).$$

Sementara itu, kita juga mempunyai

$$L(P,f) \le \int_a^b f(x)\,dx \le U(P,f).$$

Dari kedua ketaksamaan ini kita peroleh

$$\left|S(P,f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le U(P,f) - L(P,f) < \epsilon,$$

dan teorema pun terbukti. □

Teorema berikut merupakan kebalikan dari Teorema 1. Buktinya diserahkan sebagai latihan.

Teorema 2. *Misalkan f terbatas pada I. Misalkan terdapat suatu bilangan $A \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat partisi P_ϵ dari I sedemikian sehingga untuk sembarang partisi $P \supseteq P_\epsilon$ dan sembarang jumlah Riemann $S(P, f)$ berlaku*

$$|S(P, f) - A| < \epsilon.$$

Maka f terintegralkan pada I dan

$$\int_a^b f(x)\, dx = A.$$

Soal Latihan

1. Buktikan Teorema 2.
2. Misalkan $f(x) = x,\ x \in [0, b]$. Gunakan Teorema 1 dan Soal Latihan 15.1 No. 1 untuk menyimpulkan bahwa $\int_0^b x\, dx = \frac{1}{2}b^2$.
3. Gunakan Teorema 1 untuk memberikan bukti alternatif untuk Teorema Dasar Kalkulus II (Teorema 6 pada Sub-bab 14.2).

15.3 Teorema Darboux

Terdapat cara lain melihat integral sebagai limit dari jumlah Riemann. Misalkan $I := [a, b]$ dan $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ adalah partisi dari I. Ukuran *kehalusan* dari P, dilambangkan dengan $\|P\|$, didefinsikan sebagai

$$\|P\| := \sup\{x_k - x_{k-1} \,:\, k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Dalam perkataan lain, $\|P\|$ adalah panjang sub-interval maksimum yang terkait dengan partisi P.

Catat bahwa dua partisi berbeda dapat memiliki kehalusan yang sama. Selain itu, jika $P \subseteq Q$ (yakni, Q merupakan perhalusan dari P), maka $\|Q\| \le \|P\|$. Namun sebaliknya $\|Q\| \le \|P$ tidak mengharuskan $Q \subseteq P$.

Teorema berikut memperlihatkan bahwa jika f terintegralkan pada I, maka integral f pada I merupakan limit dari jumlah Riemann untuk $\|P\| \to 0$.

Teorema 3 (Teorema Darboux). *Misalkan f terintegralkan pada I. Maka, untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika Q adalah partisi dari I dengan $\|Q\| < \delta$, maka untuk sembarang jumlah Riemann $S(Q, f)$ berlaku*

$$\left| S(Q,f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \epsilon.$$

Bukti. Diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, terdapat partisi $P_\epsilon := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sedemikian sehingga

$$U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Akibatnya, jika $P \supseteq P_\epsilon$, maka

$$U(P, f) - L(P, f) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Selanjutnya misalkan $M := \sup\{|f(x)| : x \in I\}$ dan $\delta := \frac{\epsilon}{12Mn}$.

Ambil sembarang partisi $Q := \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ dari I dengan $\|Q\| < \delta$ dan misalkan $Q^* := Q \cup P_\epsilon$. Maka $Q^* \supseteq P_\epsilon$ dan Q^* mempunyai sebanyak-banyaknya $n-1$ titik lebih banyak daripada Q, yakni titik-titik $x_1, \dots, x_{n-1}$ yang ada di P_ϵ tetapi tidak di Q. Selanjutnya kita akan membandingkan $U(Q, f)$ dengan $U(Q^*, f)$, serta $L(Q, f)$ dengan $L(Q^*, f)$.

Karena $Q^* \supseteq Q$, kita mempunyai $U(Q, f) - U(Q^*, f) \geq 0$. Jika kita tuliskan $Q^* = \{z_0, z_1, \dots, z_p\}$, maka $U(Q, f) - U(Q^*, f)$ dapat dinyatakan sebagai jumlah dari sebanyak-banyaknya $2(n-1)$ suku berbentuk

$$(M_j - M_k^*)(z_k - z_{k-1}),$$

dengan M_j menyatakan supremum dari f pada sub-interval ke-j dalam Q dan M_k^* menyatakan supremum dari f pada sub-interval ke-k dalam Q^*. Karena $|M_j - M_k^*| \leq 2M$ dan $|z_k - z_{k-1}| \leq \|Q^*\| \leq \|Q\| < \delta$, kita peroleh

$$0 \leq U(Q, f) - U(Q^*, f) \leq 2(n-1) \cdot 2M \cdot \delta < \frac{\epsilon}{3}.$$

Akibatnya, kita dapatkan

$$U(Q, f) < U(Q^*, f) + \frac{\epsilon}{3}.$$

Serupa dengan itu kita juga mempunyai

$$L(Q^*, f) - \frac{\epsilon}{3} < L(Q, f).$$

Selanjutnya kita tahu bahwa $S(Q,f)$ dan $\int_a^b f(x)\,dx$ terletak dalam interval $[L(Q,f),U(Q,f)]$, dan karena itu keduanya berada dalam interval

$$I_\epsilon := [L(Q*,f)-\frac{\epsilon}{3}, U(Q^*,f)+\frac{\epsilon}{3}].$$

Karena $Q^* \supseteq P_\epsilon$, kita mempunyai $U(Q^*,f)-L(Q^*,f) < \frac{\epsilon}{3}$, sehingga panjang I_ϵ lebih kecil daripada ϵ. Jadi jarak antara $S(Q,f)$ dan $\int_a^b f(x)\,dx$ mestilah lebih kecil daripada ϵ, sebagaimana yang ingin kita buktikan. □

Kebalikan dari Teorema 3 juga berlaku.

Teorema 4. *Misalkan $f: I \to \mathbb{R}$ terbatas. Misalkan terdapat suatu bilangan $B \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk sembarang partisi P dari I dengan $\|P\| < \delta$ dan sembarang jumlah Riemann $S(P,f)$ berlaku*

$$|S(P,f)-B| < \epsilon.$$

Maka f terintegralkan pada I dan

$$\int_a^b f(x)\,dx = B.$$

Soal Latihan

1. Buktikan Teorema 4. (*Petunjuk.* Gunakan Teorema 2.)

2. Buktikan bahwa f terintegralkan jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|P\| < \delta$ dan $\|Q\| < \delta$, maka

$$|S(P,f)-S(Q,f)| < \epsilon.$$