# 16. BARISAN FUNGSI

## 16.1 Barisan Fungsi dan Kekonvergenan Titik Demi Titik

Bila pada bab-bab sebelumnya kita membahas fungsi sebagai sebuah objek individual, maka pada bab ini dan selanjutnya kita akan membahas keluarga fungsi yang membentuk suatu barisan. Dalam aplikasi, barisan fungsi muncul ketika kita berupaya menghampiri sebuah fungsi dengan keluarga fungsi yang kita kenal baik.

Sebuah *barisan fungsi* adalah suatu pengaitan $n \mapsto f_n$, $n \in \mathbb{N}$, yang kita tuliskan sebagai $\langle f_n \rangle$. Di sini $f_n$ merupakan fungsi dan untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ kita asumsikan bahwa $f_n$ mempunyai daerah asal yang sama, sebutlah $A \subseteq \mathbb{R}$.

Seperti pada pembahasan barisan bilangan real, ketika dihadapkan dengan sebuah barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ kita akan tertarik untuk membahas perilaku $f_n$ apabila $n \to \infty$. Dalam perkataan lain, kita ingin mempelajari kekonvergenan barisan $\langle f_n \rangle$ pada $A$.

Mengingat bahwa untuk tiap $x \in A$, $f_n(x)$ membentuk suatu barisan bilangan real, maka kekonvergenan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ dapat didefinisikan melalui kekonvergenan barisan bilangan $\langle f_n(x) \rangle$. Bila untuk tiap $x \in A$, barisan $\langle f_n(x) \rangle$ konvergen ke suatu bilangan (yang secara umum bergantung pada $x$), sebutlah $L_x$, maka kita peroleh sebuah fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = L_x$. Jadi, untuk tiap $x \in A$, kita mempunyai

$$f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty.$$

Dalam hal ini, kita katakan bahwa $\langle f_n \rangle$ *konvergen titik demi titik* ke $f$, dan kita tuliskan

$$f_n \to f \text{ (titik demi titik)}, \quad n \to \infty.$$

Fungsi $f$ di sini disebut sebagai *limit* (titik demi titik) barisan $\langle f_n \rangle$.

**Contoh 1.** Misalkan untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ kita mempunyai

$$f_n(x) := x^n, \quad x \in [0, 1].$$

Maka, barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ konvergen titik demi titik ke fungsi $f$ dengan

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Untuk mendapatkan gambaran tentang apa yang terjadi, gambarlah grafik beberapa buah fungsi $f_n$ dan juga grafik fungsi $f$, pada sebuah sistem koordinat yang sama.

Dalam Contoh 1 kita melihat bahwa $f_n$ kontinu pada $[0, 1]$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, namun $f$ tidak kontinu pada $[0, 1]$. Jadi, kekonvergenan titik demi titik secara umum tidak mempertahankan sifat kekontinuan fungsi. Padahal, dalam aplikasinya, ini merupakan salah satu isu penting. Oleh karena itu, dalam pembahasan berikutnya, kita akan mempelajari jenis kekonvergenan barisan fungsi yang lebih kuat, yang mempertahankan antara lain sifat kekontinuan fungsi.

### Soal Latihan

1. Tinjau barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ yang dibahas dalam Contoh 1. Diberikan $x \in [0, 1]$ dan $\epsilon > 0$, tentukan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \ge N$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. (*Catatan.* Kasus $x = 1$ perlu ditangani tersendiri.)

2. Untuk masing-masing barisan fungsi di bawah ini, tentukan sebuah fungsi $f$ yang merupakan limitnya (titik demi titik).

   (a) $f_n(x) := \frac{x^n}{n}$, $x \in [0, 1]$.

   (b) $f_n(x) := nx(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$.

   (c) $f_n(x) := \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (d) $f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (e) $f_n(x) := \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$, $x > 0$.

3. *Deret* fungsi $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ didefinisikan sebagai limit titik demi titik dari barisan jumlah parsial $\left\langle \sum_{k=1}^{n} f_k \right\rangle$, bila barisan jumlah parsial ini konvergen. Jika

barisan jumlah parsial tersebut konvergen titik demi titik ke fungsi $s$ pada $A$, maka $s$ disebut sebagai *jumlah* deret pada $A$. Dalam hal ini, kita tuliskan

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = s(x),\ x \in A.$$

Secara umum, indeks $k$ dapat berjalan mulai dari sembarang $k \in \mathbb{Z}$.

Misalkan $f_k(x) := x^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Tentukan untuk nilai $x$ manakah barisan jumlah parsial $\left\langle \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right\rangle$ konvergen, dan tentukan pula jumlahnya.

### 16.2 Kekonvergenan Seragam

Misalkan $\langle f_n \rangle$ adalah suatu barisan fungsi yang, katakanlah, konvergen titik demi titik ke fungsi $f$ pada $A$. Dalam hal ini, diberikan $x \in A$ dan $\epsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Secara umum bilangan $N$ di sini bergantung pada $x$, selain pada $\epsilon$. Bila bilangan $N$ tadi berlaku untuk tiap $x \in A$, maka $\langle f_n \rangle$ dikatakan *konvergen seragam* ke $f$ pada $A$.

Jadi, barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke $f$ pada $A$ apabila untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ dan $x \in A$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Dalam hal ini kita tuliskan

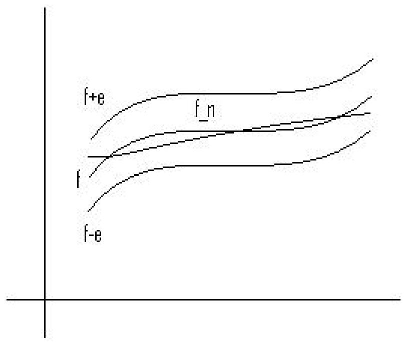
$$f_n \to f \text{ (seragam)}, \quad n \to \infty.$$

Jelas bahwa kekonvergenan seragam akan mengakibatkan kekonvergenan titik demi titik. (Dalam perkataan lain, kekonvergenan titik demi titik merupakan syarat perlu untuk kekonvergenan seragam.)

Perhatikan bahwa ketaksamaan $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ setara dengan

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon.$$

Bila ini berlaku untuk setiap $n \geq N$ dan $x \in A$, maka grafik fungsi $f_n$ pada $A$ berada di antara 'pita' $[f - \epsilon, f + \epsilon]$ yang mempunyai lebar $2\epsilon$ dan median grafik fungsi $f$, sebagaimana diilustrasikan dalam Gambar 16.1.




Gambar 16.1 Pita dengan lebar $2\epsilon$ dan median grafik fungsi $f$

**Contoh 2**. Barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ dengan $f_n(x) := x^n,\ x \in [0,1]$, tidak konvergen seragam ke $f$ pada $[0,1]$, dengan

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Di sini, pita $[f - \frac{1}{4}, f + \frac{1}{4}]$ tidak akan memuat grafik $f_n$ untuk $n$ berapa pun.

Lemma berikut (yang merupakan negasi dari definisi kekonvergenan seragam) dapat dipakai untuk menyelediki ketidakkonvergenan seragam suatu barisan fungsi.

**Lemma 3**. *Barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ tidak konvergen seragam ke fungsi $f$ pada $A$ jika dan hanya jika untuk suatu $\epsilon_0 > 0$ terdapat subbarisan $\langle f_{n_k} \rangle$ dari $\langle f_n \rangle$ dan barisan bilangan $\langle x_k \rangle$ di $A$ sedemikian sehingga*

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \ge \epsilon_0.$$

Dengan menggunakan Lemma 3, ketidakkonvergenan seragam barisan fungsi dalam Contoh 2 dapat dibuktikan dengan mengambil $\epsilon_0 = \frac{1}{4}$, $n_k = k$ dan $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/k}$. Di sini kita mempunyai

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

Ketidakkonvergenan seragam barisan dalam Contoh 2 juga dapat dijelaskan dengan teorema di bawah ini (yang mengatakan bahwa kekonvergenan seragam mempertahankan sifat kekontinuan).

**Teorema 4**. *Misalkan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke $f$ pada suatu interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Jika $f_n$ kontinu di $c \in I$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, maka $f$ juga kontinu di $c$.*

*Bukti.* Diberikan $\epsilon > 0$, pilih $N \in \mathbb{N}$ sedmeikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ dan $x \in I$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Karena $f_N$ kontinu di $c$, maka suatu interval $I_\delta(c) \subseteq I$ yang memuat $c$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in I_\delta(x)$ berlaku

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Jadi, untuk setiap $x \in I_\delta(c)$, kita mempunyai

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Ini membuktikan bahwa $f$ kontinu di $c$. □

**Soal Latihan**

1. Selidiki apakah masing-masing barisan fungsi di bawah ini konvergen seragam ke limitnya.

   (a) $f_n(x) := \frac{x^n}{n},\ x \in [0,1]$.

   (b) $f_n(x) := nx(1-x^2)^n,\ x \in [0,1]$.

   (c) $f_n(x) := \frac{x}{n},\ x \in \mathbb{R}$.

   (d) $f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}},\ x \in \mathbb{R}$.

   (e) $f_n(x) := \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}},\ x > 0$.

2. Buktikan jika $\langle f_n \rangle$ dan $\langle g_n \rangle$ konvergen seragam ke $f$ dan $g$ pada $A$ (berturut-turut), maka $\langle f_n + g_n \rangle$ konvergen seragam ke $f + g$ pada $A$.

3. Misalkan $f_n(x) := x + \frac{1}{n}$ dan $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke $f$ pada $\mathbb{R}$, namun $\langle f_n^2 \rangle$ tidak konvergen seragam ke $f^2$ pada $\mathbb{R}$.

### 16.3 Kriteria Cauchy untuk Kekonvergenan Seragam

Dalam membahas kekonvergenan seragam, seringkali kita terbantu dengan pengertian *norma seragam* berikut. Ingat bahwa untuk $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dikatakan *terbatas* pada $A$ apabila $f(A)$ merupakan himpunan terbatas. Sekarang, jika $f$ terbatas pada $A$, maka kita definisikan *norma seragam* $f$ pada $A$ sebagai

$$\|f\|_A := \sup\{|f(x)| \,:\, x \in A\}.$$

Perhatikan bahwa $\|f\|_A < \epsilon$ setara dengan $|f(x)| < \epsilon$ untuk tiap $x \in A$.

Menggunakan norma seragam, kita mempunyai lemma berikut tentang kekonvergenan seragam.

**Lemma 5**. *Misalkan $f_n$ terbatas pada $A$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$. Maka, barisan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke $f$ pada $A$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_A = 0$.*

Dengan menggunakan Lemma 5, kita juga dapat membuktikan ketidakkonvergenan seragam barisan fungsi dalam Contoh 2, dengan menghitung bahwa

$$\|f_n - f\|_{[0,1]} = 1$$

untuk tiap $n \in \mathbb{N}$.

Dengan menggunakan norma seragam, kita peroleh pula kriteria berikut untuk kekonvergenan seragam suatu barisan fungsi.

**Teorema 6 (Kriteria Cauchy untuk Kekonvergenan Seragam)**. *Misalkan $f_n$ terbatas pada $A$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$. Maka, barisan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke suatu fungsi terbatas $f$ pada $A$ jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk sembarang $m, n \geq N$ berlaku $\|f_m - f_n\| < \epsilon$.*

*Bukti*. Misalkan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke $f$ pada $A$. Diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, pilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $\|f_n - f\|_A < \frac{\epsilon}{2}$. Akibatnya, jika $m, n \geq N$, maka

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

untuk tiap $x \in A$. Jadi $\|f_m - f_n\|_A < \epsilon$ untuk $m, n \geq N$.

Sebaliknya, misalkan untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $m, n \geq N$ kita mempunyai $\|f_m - f_n\|_A < \epsilon$. Maka, untuk setiap $x \in A$, berlaku

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_A < \epsilon,$$

untuk $m, n \geq N$. Ini berarti bahwa $\langle f_n(x) \rangle$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$, dan karenanya ia merupakan barisan yang konvergen, katakanlah ke $f(x)$. Selanjutnya, untuk setiap $x \in A$, kita mempunyai

$$|f_m(x) - f(x)| = \lim_{n \to \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon,$$

untuk $m \geq N$. Ini menunjukkan bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke $f$ pada $A$. $\square$

**Soal Latihan**

1. Buktikan Lemma 5.
2. Misalkan $\langle f_n \rangle$ dan $\langle g_n \rangle$ adalah barisan fungsi terbatas pada $A$, yang konvergen seragam ke $f$ dan $g$ pada $A$ (berturut-turut). Tunjukkan bahwa $\langle f_n g_n \rangle$ konvergen seragam ke $fg$ pada $A$.
3. Misalkan $\langle f_n \rangle$ adalah barisan fungsi pada $A$ dan $|f_n(x)| \leq M_n$ untuk tiap $x \in A$ dan $n \in \mathbb{N}$. Buktikan jika $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergen, maka deret fungsi $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergen seragam pada $A$.