# 17. PERTUKARAN LIMIT

## 17.1 Pertukaran Limit dan Turunan

Kita telah melihat sebelumnya bahwa kekonvergenan seragam mempertahankan sifat kekontinuan fungsi, yakni, jika $f_n$ kontinu pada $A$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ dan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke $f$ pada $A$, maka $f$ kontinu pada $A$.

Sekarang kita bertanya: apakah kekontinuan seragam juga mempertahankan sifat diferensiabilitas? Pertanyaan ini penting mengingat dalam aplikasi kita seringkali menaksir sebuah fungsi $f$ dengan suatu deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (misalnya), dan kemudian kita menginginkan

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Jawaban untuk pertanyaan ini ternyata negatif. Sebagai contoh, fungsi $f$ yang didefinisikan sebagai jumlah deret berikut

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cos(3^k x)$$

merupakan fungsi yang kontinu di setiap titik tetapi tidak mempunyai turunan di titik manapun (lihat Bartle & Sherbert). Padahal, jumlah parsial deret ini mempunyai turunan di setiap titik dan membentuk barisan yang konvergen seragam ke $f$. Jadi, kekonvergenan seragam dari suatu barisan fungsi yang mempunyai turunan ternyata tidak menjamin bahwa limitnya mempunyai turunan.

Teorema berikut memberikan suatu syarat cukup agar sebuah barisan fungsi mempertahankan sifat diferensiabilitas. (Lihat Bartle & Sherbert untuk buktinya.)

**Teorema 1**. *Misalkan $I \subseteq \mathbb{R}$ adalah suatu interval terbatas dan $\langle f_n \rangle$ adalah barisan fungsi pada $I$. Misalkan terdapat $x_0 \in I$ sedemikian sehingga $\langle f_n(x_0) \rangle$ konvergen dan* *barisan* $\langle f_n' \rangle$ *terdefinisi dan konvergen seragam ke suatu fungsi* $g$ *pada* $I$. *Maka,* $\langle f_n \rangle$ *konvergen seragam ke suatu fungsi* $f$ *pada* $I$ *dengan* $f'(x) = g(x), \quad x \in I$.

**Soal Latihan**

1. Misalkan $f_n(x) := \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. Selidiki apakah limit dan turunan dapat bertukar untuk barisan fungsi ini.

2. Misalkan $f_n(x) := \frac{x^n}{n}$, $x \in [0,1]$. Buktikan bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke suatu fungsi $f$ yang mempunyai turunan pada $[0,1]$, dan $\langle f_n' \rangle$ konvergen ke suatu fungsi $g$ pada $[0,1]$, tetapi $f'(1) \neq g(1)$.

### 17.2 Fungsi Eksponensial

Dalam Kalkulus, kita mendefinisikan fungsi eksponensial $E(x) := e^x$ sebagai invers dari fungsi logaritma $L(x) := \ln x := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$, $x > 0$. Namun, daripada mengulang apa yang telah kita pelajari dalam Kalkulus, kita akan mempelajari suatu cara lain mendefinisikan fungsi eksponensial, yaitu dengan meninjau Masalah Nilai Awal

$$E'(x) = E(x), \quad E(0) = 1. \tag{1}$$

Perhatikan bahwa Masalah Nilai Awal ini setara dengan persamaan integral

$$E(x) = 1 + \int_0^x E(t)\, dt.$$

Untuk mendapatkan solusinya, kita lakukan *iterasi Picard* dengan hampiran awal $E_0(x) := 1$ dan

$$E_{n+1}(x) := 1 + \int_0^x E_n(t)\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dalam hal ini, kita akan memperoleh barisan fungsi

$$E_n(x) := 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

yang memenuhi

$$E_{n+1}'(x) = E_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Sekarang marilah kita pelajari barisan fungsi ini. Misalkan $R > 0$. Jika $|x| \leq R$ dan $m > n > 2R$, maka

$$\begin{aligned}|E_m(x) - E_n(x)| &= \Big|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}\Big| \\ &\leq \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\Big[1 + \frac{R}{n} + \cdots + \Big(\frac{R}{n}\Big)^{m-n-1}\Big] \\ &< \frac{2R^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R^n}{n!} = 0$, kita simpulkan bahwa barisan $\langle E_n \rangle$ konvergen seragam pada $[-R, R]$ untuk $R > 0$ sembarang.

Sebagai akibatnya, kita mempunyai teorema berikut.

**Teorema 2**. *Barisan $\langle E_n \rangle$ konvergen titik demi titik ke suatu fungsi $E$ yang kontinu pada $\mathbb{R}$, dengan $E(0) = 1$.*

*Bukti*. Berdasarkan penjelasan di atas, jelas bahwa $\langle E_n(x) \rangle$ konvergen untuk tiap $x \in \mathbb{R}$. Definisikan $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$E(x) := \lim_{n\to\infty} E_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Karena setiap $x \in \mathbb{R}$ termuat dalam suatu interval $[-R, R]$, maka $E$ kontinu pada $\mathbb{R}$. Selanjutnya, karena $E_n(0) = 1$ untuk tiap $n$, maka $E(0) = 1$. $\square$

Lebih jauh, kita mempunyai:

**Teorema 3**. *$E$ mempunyai turunan dengan $E'(x) = E(x)$ untuk tiap $x \in \mathbb{R}$.*

*Bukti*. Mengingat bahwa $E_n$ mempunyai turunan dan $E'_{n+1}(x) = E_n(x)$ untuk tiap $n = 0, 1, 2, \ldots$, barisan $\langle E'_n \rangle$ juga konvergen seragam ke $E$ pada sembarang interval $[-R, R]$. Menurut Teorema 1,

$$E'(x) = \lim_{n\to\infty} E'_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} E_n(x) = E(x),$$

pada sembarang interval $[-R, R]$. Dengan demikian, $E'(x) = E(x)$ untuk tiap $x \in \mathbb{R}$. $\square$

**Akibat 4**. *Fungsi $E$ mempunyai turunan ke-$k$ untuk tiap $k \in \mathbb{N}$, dengan $E^{(k)}(x) = E(x)$ untuk tiap $x \in \mathbb{R}$.*

**Teorema 5**. *Fungsi E yang memenuhi Masalah Nilai Awal (3) adalah tunggal.*

**Soal Latihan**

1. Buktikan jika $x > 0$, maka $E(x) > 1 + x$.

2. Buktikan Teorema 5.

## 17.3 Pertukaran Limit dan Integral

Sekarang mari kita periksa apakah kekonvergenan titik demi titik mempertahankan keterintegralan. Misalkan $f_n(x) := nx(1-x^2)^n,\ x \in [0,1]$ (Soal 16.1 No. 2(b). Barisan fungsi ini konvergen ke fungsi $f \equiv 0$ pada $[0,1]$. Di sini $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, sementara

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = -\frac{n}{2}\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}.$$

Jadi, kita peroleh

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Dengan demikian, untuk barisan fungsi ini, kita melihat bahwa

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Perlu dicatat di sini bahwa $\langle f_n\rangle$ tidak konvergen seragam ke $f$.

Pertanyaannya sekarang adalah: bilakah limit dan integral dapat bertukar tempat, yakni bilakah

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx?$$

Teorema berikut menyatakan bahwa kekonvergenan seragam mempertahankan keterintegralan dan menjamin bahwa limit dan integral dapat betukar tempat.

**Teorema 6**. *Misalkan $f_n$ terintegralkan pada $I := [a,b]$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ dan $\langle f_n\rangle$ konvergen seragam ke $f$ pada $[a,b]$. Maka, $f$ terintegralkan pada $[a,b]$ dan*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

*Bukti.* Diberikan $\epsilon > 0$, pilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m \geq N$ berlaku

$$\|f - f_m\|_I < \frac{\epsilon}{4(b-a)}.$$

Selanjutnya, karena $f_N$ terintegralkan, maka menurut Kriteria Riemann, terdapat partisi $P_\epsilon := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dari $I$ sedemikian sehingga

$$U(P_\epsilon, f_N) - L(P_\epsilon, f_N) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sementara itu, karena $|f(x) - f_N(x)| \leq \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ untuk tiap $x \in I$, maka

$$M_j(f) \leq M_j(f_N) + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$$

dengan $M_j(f) := \sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x)$ dan $M_j(f_N) := \sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f_N(x)$. Jadi, kita peroleh

$$U(P_\epsilon, f) \leq U_(P_\epsilon, f_N) + \frac{\epsilon}{4}.$$

Dengan cara yang serupa, kita juga peroleh

$$L(P_\epsilon, f_N) - \frac{\epsilon}{4} \leq L(P_\epsilon, f).$$

Akibatnya, kita dapatkan

$$U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) \leq U(P_\epsilon, f_N) - L(P_\epsilon, f_N) + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ini membuktikan bahwa $f$ terintegralkan pada $I$.

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa limit dan integral dapat bertukar tempat, kita amati bahwa

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_m(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - f_m(x)]\,dx \right| \leq \|f - f_m\|_I (b-a).$$

Karena $\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_I = 0$, maka nilai di ruas kiri mestilah menuju ke 0 bila $m \to \infty$, sehingga

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_a^b f_m(x)\,dx,$$

sesuai dengan harapan kita. □

**Soal Latihan**

1. Misalkan $g_n(x) := nx(1-x)^n,\ x \in [0,1]$. Selidiki kekonvergenan $\langle g_n \rangle$ dan $\langle \int_0^1 g_n(x)\,dx \rangle$.

2. Misalkan $\langle f_n \rangle$ adalah barisan fungsi yang terintegralkan pada $[a,b]$, yang konvergen (titik demi titik) ke suatu fungsi yang terintegralkan pada $[a,b]$. Misalkan pula bahwa terdapat $B > 0$ sedemikian sehingga $|f_n(x)| \leq B$ untuk tiap $x \in [a,b]$ dan $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$