OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL DAN KETAKSAMAAN OLSEN DI RUANG MORREY TAK HOMOGEN YANG DIPERUMUM

Idha Sihwaningrum, Hendra Gunawan, dan Wono Setya Budhi

KK Analisis dan Geometri,

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Institut Teknologi Bandung,, Bandung 40132, Indonesia

hanidha@students.itb.ac.id, hgunawan,wono@math.itb.ac.id

Abstract

For an *n*-dimensional measure μ (where $0 < \alpha < n \le d$), we define here the generalized Morrey spaces $M^{p,\phi}(\mathbf{R}^d, \mu)$ of non-homogeneous type. We also prove that the fractional integral operator I_α^n is a bounded operator from $M^{p,\phi}(\mathbf{R}^d, \mu)$ to $M^{q,\psi}(\mathbf{R}^d, \mu)$. As a consequence, the Olsen inequality holds in non-homogeneous setting.

Key words: *Fractional integral operator, Olsen inequality, generalized Morrey spaces, non-homogeneous*

Abstrak

Pada makalah ini, didefinisikan ruang Morrey tak homogen yang diperumum $M^{p,\phi}(\mathbf{R}^d, \mu)$ untuk ukuran μ yang berdimensi-*n* (dengan $0 < \alpha < n \le d$). Kemudian, dibuktikan bahwa operator integral fraksional I_α^n merupakan operator yang terbatas. dari $M^{p,\phi}(\mathbf{R}^d, \mu)$ to $M^{q,\psi}(\mathbf{R}^d, \mu)$. Sebagai akibatnya, ketaksamaan Olsen juga berlaku untuk kasus tak homogen.

Kata kunci: *Operator integral fraksional, ketaksamaan Olsen, ruang Morrey yang diperumum, tak homogen..*

1. Pendahuluan

Operator integral fraksional, yang disebut juga potensial Riesz, merupakan salah satu objek penelitian sejak diperkenalkan oleh Hardy, Littlewood dan

Sobolev sekitar tahun 1930-an. Di ruang tak homogen, operator integral fraksional I_α^n (untuk $0<\alpha<n\le d$) didefinisikan dengan

$$I_\alpha^n f(x) := \int_{\mathbf{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) .$$

(García-Cuerva dan Martell, 2001). Apabila penyebut dari integran berpangkat $d-\alpha$ dan $d\mu$ adalah ukuran Lebesgue biasa, maka diperoleh operator integral fraksional klasik dari (Hardy and Littlewood, 1927; Hardy and Littlewood, 1932; dan Sobolev, 1938).

Ruang metrik $\mathbf{R}^d$ yang dilengkapi dengan ukuran Borel positif μ disebut ruang tak homogen apabila μ berdimensi-n ($0 < n \le d$), yakni terdapat konstanta $C>0$ sedemikian sehingga

$$\mu(B(a,r)) \le Cr^n \tag{1.1}$$

untuk setiap bola buka $B(a,r)$ yang berpusat di $a \in \mathbf{R}^d$ dan berjari-jari $r > 0$ (García-Cuerva dan Martell, 2000; García-Cuerva dan Gatto, 2004). Kondisi (1.1) ini disebut juga *growth condition* (Sawano, 2005). Ruang tak homogen pertama kali diperkenalkan oleh (Nazarov, *et. al.*, 1998); dan pada ruang ini tidak berlaku *doubling condition* seperti halnya di ruang homogen. Ukuran Borel μ dikatakan memenuhi *doubling condition* jika terdapat konstanta $C>0$ sedemikian sehingga untuk setiap bola $B(a,r)$ berlaku

$$\mu(B(a,2r)) \le C\mu(B(a,r))$$

(Coifman and Gusmán, 1970/1971). Disini, $B(a,2r)$ menyatakan bola yang berpusat di $a \in \mathbf{R}^d$ dan berjari-jari $2r$.

Dalam konteks ruang tak homogen, (García-Cuerva dan Martell, 2001) telah membuktikan bahwa I_α^n terbatas dari ruang Lebesgue $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$ untuk $1<p<\frac{n}{\alpha}$ dan $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$. Pada paper ini, keterbatasan tersebut akan diperluas ke ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Kemudian, hasilnya akan digunakan untuk menunjukkan bahwa ketaksamaan Olsen juga berlaku.

2. Ruang Morrey tak homogen yang diperumum

Untuk ukuran μ yang memenuhi *growth condition*, misalkan *f* adalah sembarang fungsi terukur-μ pada $\mathbf{R}^d$. Yang dimaksud dengan ruang Lebesgue tak homogen

$L^p(\mu) = L^p(\mathbf{R}^d, \mu)$, untuk $1 \le p < \infty$, adalah ruang kelas ekuivalen f sedemikian sehingga $\| f : L^p(\mu) \| < \infty$. Dalam hal ini,

$$\| f : L^p(\mu) \| := \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

atau $$\| f : L^\infty(\mu) \| = \operatorname{ess\,sup} \left\{ |f(x)| : x \in \mathbf{R}^d \right\}.$$

Sementara itu, ruang Lebesgue lokal (tak homogen) $L^p_{loc}(\mu) = L^p_{loc}(\mathbf{R}^d, \mu)$, $1 \le p \le \infty$, adalah ruang kelas ekuivalen f sedemikian sehingga untuk setiap subhimpunan kompak K di $\mathbf{R}^d$ berlaku

$$\int_K |f(y)|^p \, d\mu(y) < \infty, \quad 1 \le p < \infty$$

atau $$\| f : L^\infty_{loc}(\mu) \| < \infty.$$

Sekarang, misalkan $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $B := B(a,r)$, dan $\phi(B) := \phi(r)$. Untuk $1 \le p \le \infty$, ruang Morrey tak homogen yang diperumum $M^{p,\phi}(\mu) := M^{p,\phi}(\mathbf{R}^d, \mu)$ didefinisikan sebagai ruang dari semua fungsi $f \in L^p_{loc}(\mu)$ sedemikian sehingga $\| f : \mathrm{M}^{p,\phi}(\mu) \| < \infty$. Norm di ruang ini diberikan oleh

$$\| f : \mathrm{M}^{p,\phi}(\mu) \| := \sup_{r>0} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{r^n} \int_{Q(x,r)} |f(y)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty$$

atau

$$\| f : \mathrm{M}^{\infty,\phi}(\mu) \| := \sup_{r>0} \frac{1}{\phi(r)} \| f : L^\infty(B,\mu) \|.$$

Versi lain ruang Morrey tak homogen yang diperumum dapat dilihat pada (Sawano, 2007) dan (Gunawan, *et.al.,* 2007). Catat bahwa untuk $\phi(r) = r^{-n/p}$ diperoleh $M^{p,\phi}(\mu) = L^p(\mu)$, dan untuk $\phi(r)$ konstanta posititif. diperoleh $M^{\infty,\phi}(\mu) = L^\infty(\mu)$.

Disamping itu, di ruang Morrey tak homogen yang diperumum juga berlaku sifat berikut.

Fakta 2.1 $M^{\infty,\phi}(\mu) \subseteq M^{q,\phi}(\mu) \subseteq M^{p,\phi}(\mu) \subseteq M^{1,\phi}(\mu)$ *apabila* $1 < p < q < \infty$.

Bukti: Dengan menggunakan *growth condition,* untuk $f \in M^{\infty,\phi}(\mu)$ berlaku

$$\left(\frac{1}{r^n}\int_B |f(y)|^q\, d\mu(y)\right)^{1/q} \le C\left(\frac{1}{r^n}\mu(B)\right)^{1/q} \le C\,.$$

Akibatnya,

$$\sup_{r>0}\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{r^n}\int_B |f(y)|^q\, d\mu(y)\right)^{1/q} < \infty\,.$$

Ini membuktikan bahwa $M^{\infty,\phi}(\mu) \subseteq M^{q,\phi}(\mu)$.

Selanjutnya, misalkan $f \in M^{q,\phi}(\mu)$. Karena $1 < \frac{p}{q} < \infty$, maka

$$\frac{1}{r^n}\int_B |f(y)|\,d\mu(y) \le \left(\frac{1}{r^n}\int_B |f(y)|^{q/p}\, d\mu(y)\right)^{p/q}.$$

Dengan mendefinisikan $|g(y)|^p := |f(y)|$ untuk setiap $y \in \mathbf{R}^d$, diperoleh

$$\sup_{r>0}\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{r^n}\int_B |g(y)|^p\, d\mu(y)\right)^{1/p} \le \sup_{r>0}\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{r^n}\int_B |g(y)|^q\, d\mu(y)\right)^{1/q}.$$

Ini berarti $M^{q,\phi}(\mu) \subseteq M^{p,\phi}(\mu)$.

Sekarang, ambil sembarang $f \in M^{p,\phi}(\mu)$. Dengan menggunakan ketaksamaan Hölder dan *growth condition*, diperoleh

$$\frac{1}{r^n}\int_B |f(y)|\,d\mu(y) \le \frac{1}{r^n}\left(\int_B |f(y)|^p\, d\mu(y)\right)^{1/p}\left(\int_B d\mu(y)\right)^{1-1/p} \le C\left(\frac{1}{r^n}\int_B |f(y)|^p\, d\mu(y)\right)^{1/p}$$

Kemudian, dari ketaksamaan

$$\sup_{r>0}\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{r^n}\int_B |f(y)|\,d\mu(y)\right) \le C\sup_{r}\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{r^n}\int_B |f(y)|^p\, d\mu(y)\right)^{1/p}$$

didapatkan hasil yang diinginkan, yaitu $M^{p,\phi}(\mu) \subseteq M^{1,\phi}(\mu)$. □

Sifat lain yang berkenaan dengan ruang Morrey tak homogen adalah:

Fakta 2.2 *Jika* $1 \le p < \infty$ *dan* $\phi(r) \le C\psi(r)$ *(untuk* $r > 0$*), maka* $M^{p,\psi}(\mu) \subseteq M^{p,\phi}(\mu)$ *dan* $\|f : M^{p,\psi}(\mu)\| \le C\|f : M^{p,\phi}(\mu)\|$.

Fakta ini berakibat $M^{p,\psi}(\mu) = M^{p,\phi}(\mu)$ dan $\|f : M^{p,\psi}(\mu)\| \sim \|f : M^{p,\phi}(\mu)\|$ apabila $\phi \sim \psi$.

3. Keterbatasan operator integral fraksional

Asumsikan fungsi ϕ memenuhi *doubling condition* untuk fungsi, yaitu untuk konstanta positif C berlaku $\frac{1}{2} \le \frac{t}{s} \le 2 \Rightarrow \frac{1}{C} \le \frac{\phi(t)}{\phi(s)} \le C$. Asumsikan juga, fungsi ϕ memenuhi ketaksamaan $\int_r^{\infty} t^{\alpha-1}\phi(t)dt \le Cr^{\alpha}\phi(r)$. Dengan menggunakan hasil (García-Cuerva dan Martell, 2001), yakni I_{α}^{n} terbatas dari ruang Lebesgue $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$, akan ditunjukkan bahwa I_{α}^{n} terbatas dari $M^{p,\phi}(\mu)$ ke $M^{q,\psi}(\mu)$.

Teorema 3.1 *Misalkan* $1 < p < q < \infty$ *dan* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. *Jika fungsi* $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *memenuhi* $r^{\alpha}\phi(r) \le C\psi(r)$, *dengan* $C > 1$ *tidak bergantung pada* $r > 0$, *maka*

$$\left\| I_{\alpha}^{n} f : M^{q,\psi}(\mu) \right\| \le C \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\|$$

untuk setiap $f \in M^{p,\phi}(\mu)$.

Bukti: Untuk $a \in \mathbf{R}^d$, misalkan $B := B(a,r)$ dan $\hat{B} := B(a,2r)$. Selanjutnya, fungsi $f \in M^{p,\phi}(\mu)$ didekomposisi menjadi $f = f_1 + f_2$ dengan $f_1 := f_{\chi_{\hat{B}}}$ dan $f_2 := f_{\chi_{\hat{B}^C}}$. Dengan mengingat bahwa I_{α}^{n} terbatas dari ruang Lebesgue $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$, diperoleh

$$\left(\frac{1}{r^n} \int_B \left| I_{\alpha}^{n} f_1(x) \right|^q d\mu(x) \right)^{1/q} \le C\psi(r) \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\|. \qquad (3.1)$$

Kemudian, dengan memanfaatkan *doubling condition* dari fungsi $\phi(t)$ dan t^{α} didapatkan estimasi untuk $I_{\alpha}^{n} f_2(x)$, $x \in B$, yaitu

$$\left| I_{\alpha}^{n} f_2(x) \le C \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\| \right| \int_r^{\infty} t^{\alpha-1}\phi(t)dt \le Cr^{\alpha}\phi(r) \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\| \le C\psi(r) \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\|.$$

Akibatnya,

$$\left(\frac{1}{r^n} \int_B \left| I_{\alpha}^{n} f_2(x) \right|^q d\mu(x) \right)^{1/q} \le C\psi(r) \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\|. \qquad (3.2)$$

Dari ketaksamaan (3.1) dan (3.2), diperoleh hasil yang diinginkan.□

4. Ketaksamaan Olsen

Sebagai konsekuensi dari keterbatasan operator I_α^n yang dibahas pada bab sebelumnya, akan ditunjukkan bahwa ketaksamaan Olsen berlaku di ruang Morrey tak homogen yang diperumum (Hasil serupa untuk versi homogen dapat dilihat pada (Gunawan dan Eridani, 2008) serta (Kurata *et al*., 2002)). Ketaksamaan ini pertama kali diperkenalkan oleh (Olsen, 1995) untuk mempelajari solusi persamaan Schrödinger dengan potential perturbasi yang kecil *W*.

Teorema 4.1 Untuk $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$, berlaku

$$\left\| W I_\alpha^n f : M^{p,\psi}(\mu) \right\| \leq C \left\| W : L^{n/\alpha}(\mu) \right\| \left\| f : M^{q,\psi}(\mu) \right\|,$$

asalkan $W \in L^{n/\alpha}(\mu)$.

Bukti: Misalkan $r^\alpha \phi(r) = C\psi(r)$ dan $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$. Dengan menggunakan ketaksamaan Hölder, didapatkan

$$\left(\frac{1}{r^n} \int_B \left| W I_\alpha^n f(x) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{r^n} \int_B \left| W(x) \right|^{n/\alpha} d\mu(x) \right)^{\alpha/n} \left(\frac{1}{r^n} \int_B \left| I_\alpha^n f(x) \right|^q d\mu(x) \right)^{1/q}.$$

Kemudian, dengan menggunakan fakta bahwa I_α^n adalah operator yang terbatas dari $M^{p,\phi}(\mu)$ ke $M^{q,\psi}(\mu)$, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{r^n} \int_B \left| W I_\alpha^n f(x) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p} &\leq \left\| W : L^{n/\alpha}(\mu) \right\| \left\| I_\alpha^n f : M^{q,\psi}(\mu) \right\| \\ &\leq C \left\| W : L^{n/\alpha}(\mu) \right\| \left\| f : M^{q,\psi}(\mu) \right\|. \end{aligned}$$

Hasil ini memberikan ketaksamaan yang diinginkan. □

Remark. Apabila $\phi(r) = r^{-n/p}$, $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$, dan $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$, maka Teorema 3.1 dapat direduksi ke hasil (García-Cuerva dan Martell, 2001), yaitu operator I_α^n terbatas dari ruang Lebesgue $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$. Sebagai akibatnya, ketaksamaan Olsen juga berlaku di ruang $L^p(\mu)$.

Ucapan Terima kasih. Makalah ini merupakan bagian dari penelitian disertasi dan penelitian yang dibiayai dana Penelitian Fundamental Tahun 2008, DIKTI (Surat Kontrak dengan LPPM-ITB No. 0367/K01.03/Kontr-WRRIM/PL2.1.5/IV/2008).

Daftar Pustaka

Coifman, R.R. and M. de Gusmán, 1970/1971, Singular Integrals and Multiplier on Homogeneous Spaces, *Rev. Un. Mat. Argentina,* **25**, 137–143.

García-Cuerva, J. and A.E. Gatto, 2004, Boundedness Properties of Fractional Integral Operators Associated to Non-Doubling Measures, *Studia Math.,* **162,** no. 3, 245–261.

García-Cuerva, J. and J.M. Martell, 2000, Weighted Inequalities and Vector-Valued Calderón-Zygmund Operators on Non-homogeneous Spaces, *Public. Math.* , **44**, no. 2, 613–640.

García-Cuerva, J. and J.M. Martell, 2001, Two-weight Norm Inequalities for Maximal Operators and Fractional Integrals on Non-homogeneous Spaces, *Indiana Univ. Math. J.,* **50**, no. 3, 1241–1280.

Gunawan, H. and Eridani, 2008, Fractional Integrals and Generalized Olsen Inequalities, to appear in *Kyungpook Math. J.*

Gunawan, H., I. Sihwaningrum and Y. Sawano, 2007, Fractional Integral Operators in Non-homogeneous Spaces, preprint.

Hardy, G.H. and J.E. Littlewood, 1927, Some Properties of Fractional Integral I, *Math. Zeit.,* **27**, 565–606.

Hardy, G.H. and J.E. Littlewood, 1932, Some Properties of Fractional Integral II, *Math. Zeit.,* **34**, 403–439.

Kurata, K., S. Nishigaki and S. Sugano, 2002, Boundedness of Integral Operators on Generalized Morrey Spaces and Its Application to Schrödinger Operatos, *Proc. Amer. Math. Soc*., **129**, 1125–1134.

Nazarov, F., S. Treil and A. Volberg, 1998, Weak Type Estimates and Cotlar Inequalities for Calderón-Zygmund Operators on Nonhomogeneous Space, *Internat. Math. Res. Notices*, **9**, 463–487.

Olsen, P.A., 1995, Fractional Integration, Morrey Spaces and a Schrödinger Equation, *Comm. Partial Differential Equations,* **20**, 2005–2055.

Sawano, Y., 2005, Sharp Estimates of the Modified Hardy Littlewood Maximal Operator on the Non-homogeneous Space via Covering Lemmas, *Hokkaido Math. J.,* **34**, 435–458.

Sawano, Y., 2007, Generalized Morrey Spaces for Non-doubling Measures, preprint.

Sobolev, S.L., 1938, On a Theorem in Fuctional Analysis (Russian), *Mat. Sob.,* **46***,* 471–497. [English tanslation in *Amer. Math. Soc. Transl. ser. 2*, **34** (1963), 39–68].