PR II MA5034 TOPIK DALAM ANALISIS

Maret 2009

1. Misalkan $\{e_n\}$ basis ortonormal di ruang Hilbert H. Buktikan bahwa

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, y\rangle$$

untuk setiap $x, y \in H$

`Solusi`: Setiap $x \in H$ dapat dinyatakan sebagai $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$. Karena itu, untuk setiap $x, y \in H$, kita mempunyai

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, y\rangle$$

karena $\langle \cdot, \cdot\rangle$ merupakan pemetaaan yang kontinu terhadap masing-masing komponennya.

2. Misalkan $K_n(t) := \frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right]^2$. Buktikan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\delta^{1/2} K_n(t)\, dt = 0$ untuk setiap $\delta \in (0, 1/2)$.

`Solusi`: Misalkan $\delta \in (0, 1/2)$. Maka, untuk $\delta \le t \le \frac{1}{2}$, berlaku $\sin^2 \pi t \ge \sin^2 \pi\delta$, sehingga

$$\frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right]^2 \le \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2 \pi\delta}.$$

Mengingat bahwa $K_n \ge 0$, kita peroleh

$$0 \le \int_\delta^{1/2} K_n(t)\, dt \le \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2 \pi\delta}\left[\frac{1}{2} - \delta\right],$$

dan akibatnya $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\delta^{1/2} K_n(t)\, dt = 0$.