9. Teori Aproksimasi

Mulai bab ini tema kita adalah aproksimasi fungsi dan interpolasi. Diberikan sebuah fungsi f, baik secara utuh ataupun hanya beberapa nilai di titik-titik tertentu saja, kita ingin memperoleh suatu hampiran untuk f yang mempunyai bentuk tertentu (misalnya supaya lebih mudah dianalisis) dengan kesalahan yang dapat kita kontrol. Sebagai contoh, ketika kita hendak menghitung $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, kita hampiri integrannya dengan polinom berderajat n (dengan n cukup besar). Dalam konteks lain, bila kita hanya mengetahui nilai dari suatu fungsi (yang tidak diketahui) di k buah titik $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, maka kita dapat menghampiri fungsi tersebut dengan polinom berderajat $k-1$ yang 'menginterpolasi' k buah titik tadi.

9.1 Masalah Interpolasi

Misalkan V ruang bernorma atas lapangan $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$), dan V' ruang dual dari V (yang anggotanya adalah semua *fungsional* linear $f : V \to \mathbb{K}$). Masalah interpolasi abstrak dapat dirumuskan sebagai berikut. Misalkan V_n adalah subruang berdimensi n dari V, dengan basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Misalkan $L_i \in V'$, $1 \le i \le n$, adalah n fungsional linear. Diberikan n bilangan $c_i \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le n$, tentukan $v \in V_n$ sedemikian sehingga

$$L_i v = c_i, \quad 1 \le i \le n. \tag{1}$$

Pertanyaannya adalah: apakah masalah ini mempunyai solusi? Jika ya, apakah solusinya tunggal? Jika fungsi hasil interpolasi tersebut digunakan sebagai hampiran untuk suatu fungsi u dengan $u(x_i) = c_i$, $1 \le i \le n$, dapatkah kita menaksir kesalahannya?

Definisi 9.1.1. Fungsional linear L_i, $1 \le i \le n$, dikatakan *bebas linear* pada V_n apabila

$$\sum_{i=1}^{n} a_i L_i(v) = 0 \ \forall v \in V_n \Longrightarrow a_i = 0, \ 1 \le i \le n.$$

Lemma 9.1.2. *Fungsional linear L_i, $1 \le i \le n$, dikatakan bebas linear pada V_n jika dan hanya jika*

$$\det(L_i v_j) = \det \begin{bmatrix} L_1 v_1 & \ldots & L_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n v_1 & \ldots & L_n v_n \end{bmatrix} \neq 0.$$

Bukti. Pernyataan $\sum_{i=1}^{n} a_i L_i(v) = 0 \ \forall\, v \in V_n$ setara dengan $\sum_{i=1}^{n} a_i L_i(v_j) = 0 \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Karena itu, $L_1, \ldots, L_n$ bebas linear pada V_n jika dan hanya jika

$$\sum_{i=1}^{n} a_i L_i(v_j) = 0,\ 1 \le j \le n \Longrightarrow a_i = 0,\ 1 \le i \le n.$$

Ini berarti bahwa sistem persamaan linear

$$\begin{bmatrix} L_1 v_1 & \ldots & L_n v_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1 v_n & \ldots & L_n v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

hanya mempunyai solusi trivial $a_i = 0,\ 1 \le i \le n$. Dari pengetahuan aljabar linear elementer kita tahu bahwa ini terjadi jika dan hanya jika $\det(L_i v_j) \neq 0$. □

Teorema 9.1.3. *Keempat pernyataan berikut ekuivalen:*
(i) Masalah interpolasi (1) mempunyai solusi tunggal.
(ii) Fungsional linear $L_1, \ldots, L_n$ bebas linear pada V_n.
(iii) Satu-satunya elemen $v \in V_n$ yang memenuhi

$$L_i v = 0, \quad 1 \le i \le n,$$

adalah $v = 0$.
(iv) Untuk sebarang data $\{c_i\}_{i=1}^{n}$, terdapat $v \in V_n$ sedemikian sehingga

$$L_i v = c_i, \quad 1 \le i \le n.$$

Bukti. Dengan menyatakan $v := \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$, masalah interpolasi (1) setara dengan

$$\sum_{j=1}^{n} a_j L_i(v_j) = c_i, \quad 1 \le i \le n, \tag{2}$$

atau

$$\begin{bmatrix} L_1 v_1 & \ldots & L_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n v_1 & \ldots & L_n v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Karena itu, ekuivalensi keempat pernyataan dalam teorema merupakan akibat dari teorema tentang sistem persamaan linear $M\mathbf{a} = \mathbf{c}$, dengan M matriks $n \times n$, $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{c}$ vektor di $\mathbb{K}^n$. □

Selanjutnya, diberikan $u \in V$, dapat kita peroleh interpolan $v := \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ di V_n dengan menyelesaikan masalah

$$L_i v = L_i u, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{4}$$

yang setara dengan sistem persamaan linear

$$\begin{bmatrix} L_1v_1 & \dots & L_1v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_nv_1 & \dots & L_nv_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1u \\ \vdots \\ L_nu \end{bmatrix} \tag{5}$$

Berdasarkan teorema di atas, sistem (5) mempunyai solusi tunggal apabila fungsional linear $L_1, \dots, L_n$ bebas linear pada V_n.

9.2 Beberapa Contoh

Contoh 9.2.1. Misalkan $V := C[a, b]$, ruang semua fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Diberikan $n + 1$ buah titik $x_0, x_1, \dots, x_n$ dengan

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b,$$

dan $n + 1$ buah nilai $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$, kita tertarik untuk mencari suatu polinom berderajat n atau lebih rendah, sebutlah p_n, sedemikian sehingga

$$p_n(x_i) = c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Masalah ini dikenal sebagai masalah *interpolasi Lagrange*.

Catat bila c_i adalah nilai dari suatu fungsi $f \in V$ di titik x_i, yakni $c_i = f(x_i)$, maka kita sedang mencari $p_n \in V_{n+1}$, ruang semua polinom berderajat n atau lebih rendah, sedemikian sehingga

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Di sini, V_{n+1} berdimensi $n + 1$, dengan basis baku $v_j(x) := x^j$, $j = 0, 1, \dots, n$. Fungsional linear yang terkait dengan masalah ini adalah

$$L_i v := v(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Dalam hal ini, kita mempunyai

$$\det(L_i v_j) = \det \begin{bmatrix} L_0v_0 & L_0v_1 & \cdots & L_0v_n \\ L_1v_0 & L_1v_1 & \cdots & L_1v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_nv_0 & L_nv_1 & \cdots & L_nv_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer pada determinan di atas, dapat ditunjukkan bahwa

$$\det(L_i v_j) = \Pi_{k>l}(x_k - x_l) \neq 0.$$

Karena itu, masalah interpolasi Lagrange mempunyai solusi (tunggal).

Contoh 9.2.2. Misalkan $V := C^n[0,1]$, ruang semua fungsi bernilai real yang mempunyai turunan ke-n yang kontinu pada $[0,1]$, dan V_{n+1} adalah ruang semua polinom berderajat n atau lebih rendah, dengan basis baku $v_j(x) := x^j,\ j = 0, 1, \ldots, n$. Diberikan $n+1$ buah nilai $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, tinjau masalah interpolasi

$$L_i u := u^{(i)}(0) = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

dengan $u^{(0)} := u$ dan $u^{(i)}$ menyatakan turunan ke-i dari u, untuk $i = 1, \ldots, n$. Dalam hal ini, kita mempunyai

$$\det(L_i v_j) = \det \begin{bmatrix} L_0 v_0 & L_0 v_1 & \cdots & L_0 v_n \\ L_1 v_0 & L_1 v_1 & \cdots & L_1 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n v_0 & L_n v_1 & \cdots & L_n v_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n! \end{bmatrix},$$

yang nilainya tidak sama dengan 0. Solusi masalah ini tak lain adalah polinom MacLaurin berderajat n (atau lebih rendah).

Contoh 9.2.3. Misalkan $V := L^1[a,b]$, ruang semua fungsi bernilai real yang terintegralkan pada $[a,b]$, dan V_{n+1} adalah ruang semua polinom berderajat n atau lebih rendah, dengan basis baku $v_j(x) := x^j,\ j = 0, 1, \ldots, n$. Diberikan $n+1$ buah nilai $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, tinjau masalah interpolasi

$$L_i u := \int_0^1 x^i u(x)\, dx = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Di sini, $L_i u$ menyatakan *momen* ke-i dari u pada $[a,b]$. Karena itu, masalah ini dikenal sebagai *masalah momen* pada $[a,b]$. Dalam hal ini, kita mempunyai

$$\det(L_i v_j) = \det \begin{bmatrix} \langle v_0, v_0 \rangle & \langle v_0, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_0, v_n \rangle \\ \langle v_1, v_0 \rangle & \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_0 \rangle & \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix},$$

dengan

$$\langle v_i, v_j \rangle := \int_a^b v_i(x) v_j(x)\, dx = \int_a^b x^{i+j}\, dx.$$

Determinan ini dikenal sebagai *determinan Gram*, yang nilainya tidak sama dengan 0 karena $v_0, v_1, \ldots, v_n$ bebas linear. Dengan demikian, solusi masalah momen pada $[a,b]$ dijamin ada (dan tunggal).

9.3 Soal Latihan

1. Buktikan bahwa masing-masing fungsional L_i dalam Contoh 9.2.1–9.2.3 bersifat linear.

2. Buktikan bahwa pada masalah interpolasi Lagrange, $\det(x_j^i) = \Pi_{k>l}(x_k - x_l)$.

3. Untuk $k = 0, 1, \dots, n$, definisikan $\phi_k(x) := \Pi_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$. Tunjukkan bahwa $\phi_k(x_i) = 1$ bila $i = k$ dan $\phi_k(x_i) = 0$ bila $i \neq k$. Selanjutnya tunjukkan bahwa $p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x)$ merupakan polinom berderajat n atau lebih rendah yang memenuhi $p_n(x_i) = c_i,\ i = 0, 1, \dots, n$.

4. Buktikan bahwa pada masalah momen, $\det(\langle v_i, v_j \rangle) \neq 0$.

5. Tentukan polinom p_2 yang berderajat 2 atau lebih rendah sedemikian sehingga

$$\int_0^1 x^i p_2(x)\, dx = i, \quad i = 0, 1, 2.$$