Fourier Analysis & Its Applications in PDEs

Hendra Gunawan

http://personal.fmipa.itb.ac.id/hgunawan/

Analysis and Geometry Group
Bandung Institute of Technology
Bandung, INDONESIA

WIDE 2010
5-6 August 2010

Outline

Referensi

J. Douandikoetxea, "Fourier Analysis"
G.B. Folland, "Fourier Analysis and Its Applications"
H. Gunawan, "Analisis Fourier dan Wavelet"
M.A. Pinsky, "Introduction to Fourier Analysis and Wavelets"
E.M. Stein, "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions"
E.M. Stein & R. Shakarchi, "Fourier Analysis"
R. Strichartz, "The Way of Analysis"
... dan masih banyak lagi.

Deret trigonometri yang kita kenal sekarang sebagai *deret Fourier* pada mulanya digagas oleh D. Bernoulli pada tahun 1750-an dalam rangka mempelajari **persamaan gelombang** — persamaan diferensial parsial untuk dawai bergetar (*vibrating string*):

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

dengan syarat batas

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

dan syarat awal

$$u(x,0) = f(x) \text{ dan } u_t(x,0) = 0 \quad \forall x \in [0,L].$$

Di sini c konstanta, L panjang dawai, f keadaan awal dawai, dan $u = u(x,t)$ simpangan vertikal dawai di titik x pada saat t.

Bernoulli menemukan bahwa untuk $f(x) = \sin \frac{k\pi x}{L}$, fungsi

$$u(x,t) = \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{ck\pi t}{L}$$

merupakan solusi untuk setiap bilangan bulat positif k. Karena persamaan diferensial tadi merupakan persamaan diferensial parsial linear, maka kombinasi linear dari solusi-solusi di atas juga merupakan solusi. Dalam hal ini, Bernoulli menyimpulkan bahwa

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{ck\pi t}{L}$$

memenuhi persamaan, dengan syarat awal

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Bernoulli juga menyatakan bahwa ia telah mendapatkan **semua** solusi tanpa penjelasan tentang koefisien a_k.

Temuan Bernoulli ini tak lama kemudian disanggah oleh L. Euler. Bagi Euler, tidak masuk akal sebarang fungsi f yang terdefinisi pada interval $[0, L]$ dengan $f(0) = f(L) = 0$ dapat dinyatakan sebagai deret tak hingga sinus

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{L},$$

karena menurutnya deret sinus memiliki sifat khusus, yakni merupakan fungsi ganjil dan periodik dengan periode $2L$. Jadi, lanjutnya, kesamaan di atas mustahil dipenuhi oleh, misalnya, $f(x) = x(L - x)$ yang bukan fungsi ganjil ataupun periodik.

Euler, dan juga D'Alembert, pada saat itu telah menemukan solusi dalam bentuk yang berbeda, yaitu

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\bar{f}(x+ct) + \bar{f}(x-ct)\right]$$

dengan $\bar{f}$ menyatakan perluasan dari f pada $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\bar{f}$ ganjil dan periodik dengan periode $2L$. Mengingat

$$\sin\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{ck\pi t}{L} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{k\pi}{L}(x+ct) + \sin\frac{k\pi}{L}(x-ct)\right],$$

solusi Bernoulli dianggap sebagai kasus khusus dari solusi yang ia temukan.

Bernoulli tak dapat menanggapi sanggahan Euler dengan baik. Ia hanya menjelaskan bahwa persamaan

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{L}$$

merupakan suatu sistem persamaan linear dengan tak hingga peubah. Kelemahan utama argumennya adalah bahwa ia tak dapat memberikan rumus untuk koefisien a_k yang memenuhi persamaan di atas. Rumus itu akhirnya ditemukan oleh Euler beberapa tahun sesudahnya, namun Euler tidak mempelajari lebih lanjut temuannya karena ia terlanjur menolak gagasan Bernoulli sebelumnya.

Setengah abad kemudian, tepatnya pada 1807, J. Fourier berhasil mengembangkan apa yang kita kenal sekarang sebagai deret Fourier. Ketika itu ia tertarik dengan **persamaan panas** atau **persamaan difusi**:

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

dengan $u = u(x,t)$ menyatakan suhu kawat yang panjangnya L di titik x pada saat t, dengan syarat batas

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

dan syarat awal

$$u(x,0) = f(x) \quad \forall x \in [0,L].$$

Dengan menuliskan f sebagai deret

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{L},$$

Fourier menemukan solusi

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(c^2 k^2 \pi^2 t)/L^2} \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Namun, tak seperti Bernoulli, Fourier memberikan rumus untuk koefisien a_k dalam f, yaitu

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L}\, dx.$$

[Ref: Strichartz, 2000]

Deret Fourier dari sebuah fungsi periodik f merupakan deret trigonometri (persisnya deret sinus dan cosinus) untuk f. Untuk kemudahan kita akan lebih banyak bekerja dengan fungsi eksponensial kompleks $e^{i\theta}$ daripada fungsi trigonometri $\cos\theta$ dan $\sin\theta$. Ingat bahwa fungsi-fungsi ini terkait oleh rumus

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{dan} \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

Kelebihan fungsi cosinus dan sinus adalah bahwa mereka bernilai real dan mempunyai sifat simetri, sementara kelebihan fungsi eksponensial adalah rumus turunan $(e^{i\theta})' = ie^{i\theta}$ dan rumus jumlah $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$ yang relatif lebih sederhana.

Misalkan $f(\theta)$ adalah sebuah fungsi bernilai kompleks yang terdefinisi pada $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta) \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R},$$

yakni f *periodik* dengan *periode* 2π. Asumsikan pula bahwa f terintegralkan Riemann pada sebarang interval terbatas (ini dipenuhi bila, misalnya, f terbatas dan kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik pada sebarang interval terbatas). Kita ingin mengetahui kapankah f dapat diuraikan sebagai deret

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Di sini $\frac{1}{2}a_0$ merupakan koefisien fungsi konstan $\cos 0\theta = 1$ (faktor $\frac{1}{2}$ sengaja diikutsertakan untuk kemudahan yang akan kita lihat nanti). Tidak ada b_0 karena $\sin 0\theta = 0$.

Menggunakan fungsi ekponensial, persamaan tadi menjadi

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

dengan

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \text{ dan } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

atau

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n} \text{ dan } b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Untuk menjawab pertanyaan di atas, kita mencoba terlebih dahulu mencari syarat perlunya. Jika kita mempunyai persamaan di atas, dapatkah kita menyatakan koefisien c_n dalam f?

Dengan mengalikan kedua ruas dengan $e^{-ik\theta}$ $(k \in \mathbb{Z})$, kemudian integralkan dari $-\pi$ sampai π, kita peroleh (dengan menganggap bahwa integral deret sama dengan deret integral)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta.$$

Tetapi, untuk $n \neq k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta = \frac{1}{i(n-k)}e^{i(n-k)\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

sementara untuk $n = k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi.$$

Jadi satu-satunya suku yang bertahan dalam deret tadi adalah suku ke-k, sehingga kita dapatkan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = 2\pi c_k.$$

Ganti k menjadi n, maka

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dari sini kita peroleh

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Definisi. Misalkan f periodik dengan periode 2π dan terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$. Bilangan c_n, atau a_n dan b_n, sebagaimana dirumuskan di atas, disebut sebagai **koefisien Fourier** dari f, sementara deret

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad \text{atau} \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

disebut sebagai **deret Fourier** dari f.

Catat bahwa yang telah kita dapatkan saat ini baru syarat perlunya saja, belum syarat cukup. Yakni, jika kita mempunyai sebuah fungsi f yang periodik dengan periode 2π dan terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$, maka kita dapat menghitung koefisien-koefisien Fourier dan deret Fourier dari fungsi tersebut. Namun pertanyaan apakah f sama dengan deret Fouriernya, atau apakah deret Fourier dari f *konvergen* (titik demi titik) ke f, sama sekali belum terjawab.

Sebelum kita menjawab pertanyaan penting tadi, kita tinjau terlebih dahulu dua buah contoh berikut.

Contoh 1. Misalkan f periodik dengan periode 2π dan

$$f(\theta) = |\theta|, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Maka, dengan mengingat bahwa f merupakan fungsi genap, kita peroleh $a_0 = \pi$, $a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}$ dan $b_n = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Namun $(-1)^n - 1 = 0$ bila n genap, dan $(-1)^n - 1 = -2$ bila n ganjil. Dengan demikian deret Fourier dari f adalah

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2} \cos n\theta.$$

Contoh 2. Misalkan g periodik dengan periode 2π dan

$$g(\theta) = \theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Maka $c_0 = 0$ dan $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{in}$ untuk setiap $n \neq 0$. Jadi deret Fourier dari g adalah

$$\sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{in\theta}$$

atau, mengingat $(-1)^n = (-1)^{-n}$ dan $\frac{e^{in\theta}}{in} + \frac{e^{-in\theta}}{-in} = \frac{2}{n} \sin n\theta$,

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\theta.$$

Mari kita lihat apakah deret Fourier dari masing-masing fungsi tersebut konvergen titik demi titik ke fungsi semula, dengan mengamati kecenderungan beberapa jumlah parsial pertamanya.

Gambar 1. $f(\theta) = |\theta|, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$

Gambar diberikan di papan tulis.

Gambar 2. $g(\theta) = \theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$

Perhatikan bahwa pada Gambar 2 ada fenomena menarik di sekitar $x = -\pi$ dan $x = \pi$.

Ketaksamaan berikut diperlukan kelak dalam pembahasan kekonvergenan deret Fourier.

Ketaksamaan Bessel. Jika f periodik dengan periode 2π dan terintegralkan Riemann pada $[-\pi, \pi]$, maka koefisien Fourier c_n yang ditentukan oleh rumus di atas memenuhi ketaksamaan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Bukti. Untuk setiap $N \in \mathbb{N}$, kita mempunyai

$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{-in\theta} \right|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.$$

Ambil limitnya untuk $N \to \infty$, kita peroleh ketaksamaan yang diinginkan. $\square$

`Catatan.` Mengingat $|a_0|^2 = 4|c_0|^2$ dan $|a_n|^2 + |b_n|^2 = 2(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$ untuk $n \geq 1$, kita peroleh

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2 d\theta.$$

Akibat (Lemma Riemann-Lebesgue). Koefisien Fourier c_n menuju 0 bila $|n| \to \infty$. Koefisien Fourier a_n dan b_n menuju 0 bila $n \to \infty$.

Bukti. $|a_n|^2$, $|b_n|^2$, dan $|c_n|^2$ merupakan suku ke-n deret yang konvergen, dan karenanya mereka menuju 0 dan demikian pula halnya dengan a_n, b_n, dan c_n.

Soal Latihan

1. Verifikasi perhitungan koefisien a_n dan b_n pada Contoh 1 dan perhitungan koefisien c_n pada Contoh 2.
2. Verifikasi hubungan antara $|a_n|$, $|b_n|$, dan $|c_n|$.
3. Tentukan deret Fourier dari fungsi periodik f dengan periode 2π, dengan $f(\theta) = 1$ jika $0 < \theta < \pi$, $f(\theta) = -1$ jika $-\pi < \theta < 0$, dan $f(0) = f(\pi) = 0$.
4. Buktikan bahwa untuk setiap $N \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta.$$

Sekarang kita akan membahas kekonvergenan deret Fourier, khususnya kekonvergenan titik demi titik. Barisan fungsi (f_n) dikatakan *konvergen titik demi titik* ke fungsi f pada himpunan A apabila $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x)$ untuk tiap $x \in A$.

Melalui Contoh 2 yang dibahas pada bab sebelumnya kita mengetahui bahwa secara umum deret Fourier dari suatu fungsi tidak selalu konvergen titik demi titik ke fungsi semula, khususnya di titik di mana fungsi tersebut diskontinu. Namun, kita akan melihat bila fungsi tersebut memenuhi sejumlah hipotesis tertentu, maka deret Fouriernya akan konvergen titik demi titik.

Untuk menjawab pertanyaan apakah deret $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ atau $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$, dengan koefisien a_n, b_n, dan c_n sebagaimana diberikan sebelumnya, konvergen ke $f(\theta)$, kita tinjau jumlah parsialnya, yakni

$$S_N^f(\theta) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

(Ketika kita bekerja dengan bentuk eksponensial, kita sepakat bahwa kita senantiasa menyatukan suku $e^{in\theta}$ dan $e^{-in\theta}$. Itu sebabnya kita harus menyelidiki jumlah parsial simetris di atas.)

Substitusikan rumus untuk c_n ke dalam jumlah parsial tadi,

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-in(\psi-\theta)}d\psi = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{in(\psi-\theta)}d\psi$$

Selanjutnya, dengan substitusi peubah $\phi = \psi - \theta$ dan mengingat bahwa f periodik dengan periode 2π, kita peroleh

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} f(\theta+\phi)e^{in\phi}d\phi = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\phi)e^{in\phi}d\phi.$$

Karena $\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N}\ldots$, kita dapat menuliskan

$$S_N^f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\phi)D_N(\phi)d\phi,$$

dengan $D_N(\phi) := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\phi}$.

Fungsi $D_N(\phi)$ dikenal sebagai **kernel Dirichlet**. Dengan mengenalinya sebagai deret geometri, dengan suku pertama $e^{-iN\phi}$ dan rasio $e^{i\phi}$, kita dapat menyederhanakannya sebagai

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi} - 1}.$$

Selanjutnya, dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan $e^{-i\phi/2}$, kita peroleh

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1/2)\phi} - e^{-i(N+1/2)\phi}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N+1/2)\phi}{\sin \phi/2}.$$

Grafik $D_N(\phi)$ untuk $N = 25$ kurang lebih berbentuk sebagai berikut (di papan tulis).

Intuisi mendorong kita untuk menyimpulkan bahwa $S_N^f(\theta) \to f(\theta)$. Dalam hal ini titik puncak $D_N(\phi)$ yang terjadi di $\phi = 0$ 'memetik' nilai $f(\theta)$ pada $S_N^f(\theta)$; sementara osilasi cepat yang terjadi pada $D_N(\phi)$ untuk ϕ jauh dari 0 'menihilkan' bagian lainnya karena adanya pencoretan antara nilai positif dan negatif.

Untuk membuktikan kekonvergenan titik demi titik deret Fourier, kita memerlukan lemma berikut mengenai kernel Dirichet dan sejumlah peristilahan.

Lemma. Untuk setiap $N \in \mathbf{N}$ berlaku

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)d\phi = \int_{0}^{\pi} D_N(\phi)d\phi = \frac{1}{2}.$$

Misalkan $-\infty < a < b < \infty$. Kita katakan bahwa f *kontinu bagian demi bagian pada* $[a, b]$ apabila f kontinu pada $[a, b]$ kecuali di sejumlah terhingga titik, dan di titik-titik tersebut limit kiri dan limit kanan f ada.

Lalu, kita katakan bahwa f *mulus bagian demi bagian pada* $[a, b]$ apabila f kontinu bagian demi bagian pada $[a, b]$, f' ada dan kontintu pada (a, b) kecuali di sejumlah terhingga titik, dan di titik-titik tersebut turunan kiri dan turunan kanan f ada.

Sebagai ilustrasi, fungsi yang kontinu bagian demi bagian dan fungsi yang mulus bagian demi bagian digambarkan di papan tulis. Selanjutnya, f dikatakan *kontinu (mulus) bagian demi bagian pada* $\mathbb{R}$ apabila ia kontinu (mulus) bagian demi bagian pada sebarang selang terbatas $[a, b]$.

Teorema. Jika f periodik dengan periode 2π dan mulus bagian demi bagian, maka

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)],$$

dengan $f(\theta-) := \lim_{h\to 0^-} f(\theta + h)$ dan $f(\theta+) := \lim_{h\to 0^+} f(\theta + h)$.

Bukti. Menurut lemma sebelumnya, $\frac{1}{2} f(\theta-) = f(\theta-) \int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)d\phi$ dan $\frac{1}{2} f(\theta+) = f(\theta+) \int_{0}^{\pi} D_N(\phi)d\phi$. Karena itu, ...

Karena itu,

$$S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)] = \int_{-\pi}^{0} [f(\theta+\phi) - f(\theta-)] D_N(\phi) d\phi + \\ + \int_{0}^{\pi} [f(\theta+\phi) - f(\theta+)] D_N(\phi) d\phi.$$

Selanjutnya, kita dapat menuliskan

$$S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)[e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}] d\phi,$$

dengan $g(\phi) := \frac{f(\theta+\phi)-f(\theta-)}{e^{i\phi}-1}$ untuk $-\pi < \phi < 0$ dan $g(\phi) := \frac{f(\theta+\phi)-f(\theta+)}{e^{i\phi}-1}$ untuk $0 < \phi < \pi$.

Di sini g merupakan fungsi yang mulus seperti halnya f pada $[-\pi, \pi]$, kecuali di $\phi = 0$, di mana $\lim_{\phi \to 0^+} g(\phi) = -if'(\theta+)$ dan $\lim_{\phi \to 0^-} g(\phi) = -if'(\theta-)$. Jadi g kontinu bagian demi bagian pada $[-\pi, \pi]$, sehingga koefisien Fouriernya, yakni

$$c_n^g := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) e^{-in\phi} d\phi$$

menuju 0 bila $n \to \pm\infty$. Dengan demikian bentuk di atas, yang merupakan selisih $c_{-(N+1)}^g - c_N^g$, akan menuju 0 bila $N \to \infty$. $\square$

Soal Latihan

1. Misalkan f dan g periodik dengan periode 2π, mulus bagian demi bagian, dan $f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$ untuk setiap θ. Buktikan jika f dan g mempunyai koefisien Fourier yang sama, maka $f = g$.
2. Dengan meninjau nilai deret Fourier dan fungsi g (yang dibahas pada Contoh 2) di $\theta = 0$, buktikan bahwa
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$
3. Dengan menggunakan deret Fourier dari fungsi tertentu, buktikan bahwa
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Kita telah mempelajari bagaimana menguraikan fungsi periodik dengan periode 2π yang terdefinisi pada $\mathbb{R}$ sebagai deret Fourier. Deret trigonometri tersebut sebetulnya dapat pula dipakai sebagai representasi fungsi yang terdefinisi pada interval sebarang yang panjangnya 2π.

Misalkan f terdefinisi pada $[-\pi, \pi]$, dengan asumsi $f(-\pi) = f(\pi)$. (Asumsi ini dapat dipenuhi dengan cara mendefinisikan ulang, bila perlu, nilai f di salah satu titik ujungnya.) Selanjutnya misalkan f terbatas dan terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$. Kita perluas f pada $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga f periodik dengan periode 2π, melalui

$$f(\theta + 2n\pi) = f(\theta), \quad \theta \in (-\pi, \pi], \ n \in \mathbb{Z}.$$

Sebagai contoh, fungsi periodik f yang dibahas pada Contoh 1 dapat dipandang sebagai perluasan periodik fungsi $f(\theta) = |\theta|$ dari interval $(-\pi, \pi]$ ke seluruh $\mathbb{R}$.

Jika f mulus bagian demi bagian pada $(-\pi, \pi]$, maka kita dapat menguraikannya sebagai deret Fourier. Dengan membatasi kembali peubah θ pada $[-\pi, \pi]$, kita peroleh deret Fourier dari fungsi semula.

Sekarang misalkan f terdefinisi hanya pada $[0, \pi]$. Kita dapat memperluas f pada $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga ia merupakan fungsi periodik dengan periode 2π, dan kemudian kita peroleh deret Fouriernya.

Untuk memperluas f pada $\mathbb{R}$, pertama kita perluas f pada $[-\pi, \pi]$. Ada dua cara yang baku untuk hal ini, yakni dengan membuatnya menjadi fungsi genap atau ganjil.

Perluasan genap f_{genap} pada $[-\pi, \pi]$ dapat diperoleh melalui

$$f_{\text{genap}}(-\theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, \pi];$$

sementara perluasan ganjil f_{ganjil} dapat diperoleh melalui

$$f_{\text{ganjil}}(-\theta) = -f(\theta), \quad \theta \in (0, \pi], \quad f_{\text{ganjil}}(0) = 0;$$

Untuk ilustrasi, perhatikan gambar di papan tulis.

Keuntungan menggunakan f_{genap} dan f_{ganjil} adalah bahwa koefisien Fouriernya kelak sangat sederhana. Untuk f_{genap}, koefisien sinusnya akan sama dengan nol (karena $\sin n\theta$ merupakan fungsi ganjil). Untuk f_{ganjil}, koefisien cosinusnya akan sama dengan nol (karena $\cos n\theta$ merupakan fungsi genap). Jadi, deret Fourier dari f_{genap} hanya melibatkan fungsi cosinus, sementara deret Fourier dari f_{ganjil} hanya melibatkan fungsi sinus.

Dengan simetri, perhitungan koefisien lainnya juga menjadi lebih mudah:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{genap}}(\theta)\cos n\theta\, d\theta = 2\int_{0}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ganjil}}(\theta)\sin n\theta\, d\theta = 2\int_{0}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta.$$

Perhatikan bahwa pada akhirnya fungsi f yang terdefinisi pada $[0,\pi]$ muncul kembali dalam perhitungan koefisien Fourier di atas.

Definisi. Misalkan f terintegralkan pada $[0, \pi]$. Deret

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{n} a_n \cos n\theta, \quad \text{dengan } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\cos n\theta \, d\theta$$

disebut **deret cosinus Fourier** dari f; sementara deret

$$\sum_{n=1}^{n} b_n \sin n\theta, \quad \text{dengan } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\sin n\theta \, d\theta,$$

disebut‘**deret sinus Fourier** dari f.

Teorema. Misalkan f mulus bagian demi bagian pada $[0, \pi]$. Maka, deret cosinus Fourier dan deret sinus Fourier dari f konvergen ke $\frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$ di setiap $\theta \in (0, \pi)$. Khususnya, mereka konvergen ke $f(\theta)$ jika f kontinu di $\theta \in (0, \pi)$. Deret cosinus Fourier dari f konvergen ke $f(0+)$ di $\theta = 0$ dan ke $f(\pi-)$ di $\theta = \pi$; deret sinus Fourier dari f konvergen ke 0 di kedua titik tersebut.

Sekarang misalkan f adalah fungsi periodik dengan periode $2L$. Dengan substitusi peubah $x = \frac{L\theta}{\pi}$, kita peroleh fungsi baru

$$g(\theta) := f\Big(\frac{L\theta}{\pi}\Big) = f(x).$$

Perhatikan bahwa g merupakan fungsi periodik dengan periode 2π, dan karenanya dapat diuraikan sebagai deret Fourier

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)e^{-in\theta}d\theta,$$

asalkan g mulus bagian demi bagian.

Subtitusikan kembali $\theta = \frac{\pi x}{L}$ ke dalam rumus di atas, kita dapatkan deret Fourier dari fungsi f semula:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L},$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

Dinyatakan dalam cosinus dan sinus, deret ini menjadi

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)],$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x/L)dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(n\pi x/L)dx.$$

Dengan cara yang serupa seperti sebelumnya kita dapat memperoleh deret cosinus Fourier ATAU deret sinus Fourier dari fungsi f yang mulus bagian demi bagian pada $[0, L]$, yakni

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L),$$

dengan

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)dx,$$

ATAU

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L),$$

dengan

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)dx.$$

Contoh. Deret cosinus Fourier dari fungsi $f(x) = x,\ x \in [0,1]$, adalah

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x;$$

sementara deret sinus-nya adalah

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x.$$

Soal Latihan

1. Bagaimana anda dapat memperoleh deret Fourier dari sebuah fungsi yang terdefinisi pada sebarang interval $[a, b]$? Jelaskan secara detil.

Teori L^2 untuk Deret Fourier

Keluarga fungsi $\{e^{in\theta}\}$ membentuk *basis ortogonal* di ruang $L^2[-\pi,\pi]$, yaitu ruang fungsi $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ yang memenuhi

$$\|f\|_2^2 := \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta < \infty.$$

Ruang $L^2[-\pi,\pi]$ merupakan *ruang Hilbert*, dengan hasil kali dalam

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\bar{g}(\theta)\, d\theta.$$

Karena itu, setiap $f \in L^2[-\pi,\pi]$ dapat dinyatakan sebagai $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n$ (konvergen dalam norm). Lebih jauh, kita mempunyai **Kesamaan Parseval**: $\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_n\rangle|^2$.

Jika $f \in L^1([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$, maka kita mempunyai

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-2\pi i n y/T} dy \Big) e^{2\pi i n x/T}.$$

Bentuk ini mengingatkan kita akan jumlah Riemann atas suatu partisi dengan lebar $\frac{1}{T}$, yakni

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-2\pi i \xi_n y} dy \Big) e^{2\pi i \xi_n x} \Delta\xi_n,$$

dengan $\xi_n = \frac{n}{T}$ dan $\Delta\xi_n = \frac{1}{T}$. Berdasarkan hal ini, dengan mengambil $T \to \infty$, kita boleh menduga bahwa untuk f yang 'cukup bagus' akan berlaku

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \Big) e^{2\pi i \xi x} d\xi. \qquad (1)$$

Definisi. Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$, yakni $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$.
Transformasi Fourier dari f, $\widehat{f}$, didefinisikan oleh

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Seperti halnya dalam pembahasan deret Fourier, pertanyaan kita adalah bagaimana kita dapat memperoleh f kembali dari $\widehat{f}$. Kesamaan (1) menyarankan kita untuk mendefinisikan invers transformasi Fourier dari g, yang dituliskan sebagai $\check{g}$, sebagai

$$\check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema inversi Fourier kelak menyatakan bahwa

$$(\widehat{f})^{\vee}(x) = f(x), \quad \text{h.d.m.}$$

asalkan f dan $\widehat{f}$ terintegralkan. Sebelum sampai ke sana, kita mempunyai teorema berikut.

Teorema. Jika $f \in L^1(\mathbb{R})$, maka $\widehat{f}$ kontinu pada $\mathbb{R}$.

Teorema. Jika $f \in L^1(\mathbb{R})$, maka $\widehat{f}$ terbatas pada $\mathbb{R}$.

Teorema (Riemann-Lebesgue). Jika $f \in L^1(\mathbb{R})$, maka $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ h.d.m.

Akibat. Transformasi Fourier $\widehat{\ }$ memetakan $L^1(\mathbb{R})$ ke $C_0(\mathbb{R})$.

`Catatan`. $C_0(\mathbb{R})$ adalah ruang fungsi kontinu dan terbatas pada $\mathbb{R}$ dengan limit nol di $\pm\infty$.

Contoh 1. Jika $f(x) = e^{-\pi x^2}$, maka $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$.

Contoh 2. $\widehat{\chi}_{[0,1)}(\xi) = e^{-\pi i \xi} \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$.

Definisi. Untuk $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, kita definisikan **konvolusi** $f * g$:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Konvolusi bersifat seperti perkalian pada $L^1(\mathbb{R})$, yakni
(i) komutatif: $f * g = g * f$;
(ii) distributif (karena kelinearan integral):

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

$$(f + g) * h = f * h + g * h$$

$$\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$$

(iii) asosiatif (karena teorema Fubini): $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Jadi $L^1(\mathbb{R})$ merupakan suatu 'aljabar komutatif' terhadap konvolusi. Lebih jauh, teorema di bawah ini mengatakan bahwa $L^1(\mathbb{R})$ merupakan 'aljabar Banach' terhadap konvolusi.

Teorema. Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, maka $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ dan

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Selanjutnya kita mempunyai teorema berikut, yang merupakan kunci penting dalam aplikasi kelak.

Teorema. Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, maka $(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f}\widehat{g}$.

Berdasarkan teorema sebelumnya kita mengetahui bahwa $L^1(\mathbb{R})$ tidak mempunyai identitas terhadap konvolusi: Jika ada $e \in L^1(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga $e * f = f \ \forall f \in L^1(\mathbb{R})$, maka haruslah $\widehat{e}\widehat{f} = \widehat{f}$ h.d.m. $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$. Namun ini mengakibatkan $\widehat{e}(\xi) = 1$ h.d.m., bertentangan dengan Teorema Riemann-Lebesgue.

Walaupun demikian, kita mempunyai 'identitas hampiran', seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema. Misalkan $\phi \geq 0$ dan $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx = 1$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, definisikan $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Maka, untuk setiap $f \in L^1(\mathbb{R})$, kita mempunyai

$$\|\phi_\epsilon * f - f\|_1 \to 0, \quad \epsilon \to 0.$$

Teorema Inversi Fourier. Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Maka,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi, \quad \text{h.d.m.}$$

yakni, $f = (\widehat{f})^{\vee}$ h.d.m.

Akibat. Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\widehat{f} = \widehat{g}$ h.d.m., maka $f = g$ h.d.m.

`Catatan`. Akibat di atas mengatakan bahwa transformasi Fourier $\widehat{\ }$ merupakan pemetaan yang bersifat 1-1 atau injektif h.d.m.

Jika deret Fourier memenuhi kesamaan Parseval, maka transformasi Fourier memenuhi kesamaan Plancherel, yakni

Teorema (Kesamaan Plancherel). Jika $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, maka $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ dan $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Lebih umum daripada itu, kita mempunyai:

Teorema (Kesamaan Plancherel). Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, maka $\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle$.

Soal Latihan

1. Tunjukkan bahwa $\widehat{\chi}_{[0,1)}(\xi) = e^{-\pi i\xi}\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$.
2. Hitung $\widehat{\chi}_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}(\xi)$ $(T > 0)$.
3. Diketahui $f(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$. Tentukan $\widehat{f}(\xi)$.
4. Tunjukkan jika $f(x) = e^{-\pi x^2}$, maka $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$. (*Petunjuk*. Integralkan fungsi kompleks $f(z) = e^{-\pi z^2}$ sepanjang lintasan tertutup $\gamma = [-R, R] + [R, R + i\xi] + [R + i\xi, -R + i\xi] + [-R + i\xi, -R]$, dan ambil $R \to \infty$. Ingat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$.)
5. Buktikan jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, maka $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,dx$.
6. Buktikan bahwa untuk setiap f dan $g \in L^1([0, 1])$ berlaku
   1. $f * g = g * f$;
   2. $(f * g) * h = f * (g * h)$.
7. Misalkan $\chi = \chi_{[0,1)}$. Tentukan $\Delta = \chi * \chi$.

Transformasi Fourier di $L^2(\mathbb{R})$

Ruang $L^2(\mathbb{R})$, yang dilengkapi dengan hasilkali dalam $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx$, merupakan ruang Hilbert. Karena $L^2(\mathbb{R})$ bukan himpunan bagian dari $L^1(\mathbb{R})$, definisi transformasi Fourier tidak langsung berlaku di $L^2(\mathbb{R})$. Namun demikian, dengan menggunakan fakta bahwa $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ padat di $L^2(\mathbb{R})$, transformasi Fourier dari fungsi $f \in L^2(\mathbb{R})$ dapat didefinisikan sebagai limit dari suatu barisan $\widehat{f_n}$ (dalam norma di $L^2(\mathbb{R})$), dengan $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dan $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ dalam norma di $L^2(\mathbb{R})$. Semua ini dapat dilakukan sebagaimana dijamin oleh teorema berikut:

Teorema. Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$. Untuk $n \in \mathbb{N}$, definisikan $f_n = \chi_{[-n,n]} f$, yakni

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jika } |x| \le n, \\ 0, & \text{jika } |x| > n. \end{cases}$$

Maka, $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dan $\widehat{f_n} \in L^2(\mathbb{R})$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Lebih jauh, $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ dalam norma di $L^2(\mathbb{R})$ dan $(\widehat{f_n})$ konvergen (dalam norma di $L^2(\mathbb{R})$) ke suatu fungsi di $L^2(\mathbb{R})$.

Materi ini disadur dari buku G.B. Folland, "Fourier Analysis and Its Applications".

Persamaan Panas yang terkait dengan perambatan (difusi) panas pada sebuah dawai atau kawat yang panjangnya L adalah

$$u_t = ku_{xx},$$

yang mungkin disertai dengan syarat batas

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

dan syarat awal

$$u(x,0) = f(x) \quad \forall x \in [0,L].$$

Dengan **Metode Pemisahan Peubah**, kita misalkan $u(x,t) = X(x)T(t)$. Maka, persamaan tadi menjadi:

$$XT' = kX''T, \quad X(0) = X(L) = 0.$$

Dari sini, kita dapatkan

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = A$$

dengan A konstanta yang tidak bergantung pada x ataupun t. Jadi, kita mempunyai dua persamaan:

$$T' = AkT \text{ dan } X'' = AX.$$

Dari persamaan pertama kita peroleh $T(t) = C_0 e^{Akt}$, sementara dari persamaan kedua kita dapatkan

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad \lambda = \sqrt{-A}.$$

Substitusikan syarat batas, kita peroleh $C_1 = 0$ dan ($C_2 = 0$ atau $\sin \lambda L = 0$). Tentunya kita tidak sedang mencari solusi trivial 0, karena itu $\lambda L = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$, sehingga $A = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$. Dengan demikian kita peroleh solusi persamaan panas

$$u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Kombinasi linear dari u_n juga solusi, dan dengan mengambil limitnya kita simpulkan bahwa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t)$$

juga merupakan solusi persamaan panas.
Selanjutnya, syarat awal $u(x,0) = f(x)$ memberikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x),$$

yang tak lain merupakan deret sinus Fourier dari f. Dari sini kita peroleh solusi khusus, dengan

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx.$$

Soal Latihan

Tentukan solusi dari persamaan panas $u_t = ku_{xx}$ dengan syarat batas $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$.

Persamaan Gelombang untuk dawai bergetar yang panjangnya L adalah

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

yang mungkin disertai dengan syarat batas

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

dan syarat awal

$$u(x,0) = f(x) \text{ dan } u_t(x,0) = g(x).$$

Dengan Metode Pemisahan Peubah, yakni dengan pemisalan $u(x,t) = X(x)T(t)$, diperoleh dua persamaan

$$X'' = -\lambda^2 X \text{ dan } T'' = -\lambda^2 c^2 T$$

dengan $X(0) = X(L) = 0$. Dari kedua persamaan tersebut dan syarat batasnya, kita dapatkan

$$X(x) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$T(t) = C_3 \cos \frac{n\pi ct}{L} + C_4 \sin \frac{n\pi ct}{L}.$$

Dengan argumen yang serupa seperti untuk Persamaan Panas, kita dapatkan solusi untuk Persamaan Gelombang:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big(a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \Big).$$

Solusi khusus dapat diperoleh dengan menghitung koefisien a_n dan b_n dari kedua syarat awal yang diberikan.

Soal Latihan

Tentukan koefisien a_n dan b_n bila diketahui $f(x) = x(L - x)$ dan $g(x) = 0$.

Persamaan Laplace pada persegi $[0,1] \times [0,1]$ adalah

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

yang mungkin disertai dengan syarat batas

$$u(0,y) = u(1,y) = 0$$

$$u(x,0) = 0,\ u(x,1) = f(x).$$

Dengan pemisahan peubah, $u(x,y) = X(x)Y(y)$, kita peroleh dua persamaan

$$X'' = -\lambda^2 X \text{ dan } Y'' = \lambda^2 Y.$$

Dari kedua persamaan tersebut, kita dapatkan

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \text{ dan } Y = C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}.$$

Substitusikan syarat batas, kita peroleh

$$X(x) = C_2 \sin n\pi x,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$Y(y) = C_3 \sinh n\pi y,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dengan demikian, solusinya berbentuk

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \sinh n\pi y.$$

Masih ada satu syarat batas yang belum digunakan, yaitu $u(x, 1) = f(x)$. Dari syarat batas ini kita peroleh a_n.

Soal Latihan

Tentukan koefisien a_n bila diketahui $f(x) = x(1 - x)$.

Menggunakan transformasi Fourier, kita dapat menyelesaikan persamaan panas, persamaan gelombang, dan persamaan Laplace pada domain tak terbatas, dengan syarat awal tertentu.
Sebagai contoh, tinjau persamaan panas pada kawat tak terhingga

$$u_t = k u_{xx}, \ -\infty < x < \infty,$$

dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Tidak ada syarat batas karena domain x tak terbatas; namun untuk kemudahan kita asumsikan $u(x,t)$ dan $f(x)$ menuju 0 untuk $x \to \pm\infty$.
Hitung transformasi Fourier dari kedua ruas terhadap x, sehingga kita peroleh

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -k(2\pi\xi)^2 \widehat{u}(\xi,t), \quad \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi).$$

Untuk tiap ξ, ini merupakan persamaan diferensial biasa dalam t dengan sebuah syarat awal. Solusinya adalah

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{-k(2\pi\xi)^2 t}.$$

Untuk mendapatkan $u(x,t)$, kita tinggal menghitung inversnya. Ada dua cara untuk itu. Cara pertama, kita gunakan Teorema Inversi Fourier:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-k(2\pi\xi)^2 t} e^{2\pi i \xi x}\, d\xi.$$

Cara kedua, kita cukup menentukan invers dari $e^{-k(2\pi\xi)^2 t}$, yaitu

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} e^{-x^2/4kt}.$$

Dalam hal ini solusinya dalah

$$u(x,t) = f * H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-(x-y)^2/4kt}\, dy.$$

Catatan. $H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{kt}} \phi\big(\frac{x}{\sqrt{kt}}\big)$ dengan $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/4}$.

Soal Latihan

1. Tunjukkan bahwa $H_t(x)$ memenuhi Persamaaan Panas; dan dengan pertukaran turunan dan integral, $u(x,t) = f * H_t(x)$ juga memenuhi Persamaan Panas. Lebih jauh, tunjukkan jika $f \in L^1(\mathbb{R})$, maka $\|u(\cdot,t) - f\|_1 \to 0$ bila $t \to 0$.

2. Dengan transformasi Fourier, selesaikan Persamaan Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ($x \in \mathbb{R},\ y > 0$) dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$.