Fourier Analysis & Its Applications in PDEs

Hendra Gunawan

http://personal.fmipa.itb.ac.id/hgunawan/

Analysis and Geometry Group
Bandung Institute of Technology
Bandung, INDONESIA

WIDE 2010
5-6 August 2010

Outline

1. Tiga Operator Integral Penting
   - Operator Maksimal
   - Operator Integral Fraksional $I_\alpha := (-\Delta)^{-\alpha/2}$
   - Operator Integral Singular $I_u := (-\Delta)^{(iu)/2}$
2. Persamaan Gelombang dan Fungsi Maksimal Permukaan Bola
   - Solusi Persamaan Gelombang
   - Nilai Rata-Rata pada Permukaan Bola
   - Fungsi Maksimal Permukaan Bola

Materi ini disadur dari buku E.M. Stein (1970), "Singular integrals and Differentiability Properties of Functions".

Menurut **Teorema Dasar Lebesgue** (yang merupakan perumuman dari Teorema Dasar Kalkulus), kita mempunyai

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x)$$

hampir di mana-mana, asalkan f terintegralkan lokal pada $\mathbb{R}^d$. (Di sini, f adalah fungsi dari $\mathbb{R}^d$ ke $\mathbb{R}$.) Hasil ini mengatakan bahwa turunan dari integral f sama dengan f itu sendiri, hampir di mana-mana.

Teorema Dasar Lebesgue merupakan akibat dari keterbatasan **operator maksimal Hardy-Littlewood** M_{HL}, yang memetakan f ke

$$M_{HL}f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

Dengan substitusi peubah, kita dapat menuliskan

$$M_{HL}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(0,1))} \int_{B(0,1)} |f(x-ry)|\, dy.$$

Perhatikan bahwa jika f merupakan fungsi yang terbatas (oleh bilangan K), maka $M_{HL}f$ juga terbatas (oleh bilangan K yang sama) — `Soal Latihan 1`.

Berkenaan dengan operator maksimal M_{HL}, kita mempunyai:

Teorema. Untuk $1 < p \leq \infty$, kita mempunyai

$$\|M_{HL}f\|_p \leq C_p \, \|f\|_p,$$

yakni, M_{HL} merupakan operator *terbatas* di $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Catatan. Di sini $L^p(\mathbb{R}^d)$ merupakan ruang norm dengan norm $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$. Operator $T : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ dikatakan *terbatas* apabila terdapat konstanta C_p sehingga $\|Tf\|_p \leq C_p \|f\|_p$ untuk tiap $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Pada pembahasan transformasi Fourier di $\mathbb{R}$, kita telah membahas 'identitas hampiran', yaitu keluarga fungsi $\phi_r(x) = \frac{1}{r}\phi\left(\frac{x}{r}\right)$, dengan $\phi \geq 0$ dan $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = 1$. Konsep ini dapat diperluas ke $\mathbb{R}^d$, dengan mengganti definisi ϕ_r menjadi

$$\phi_r(x) = \frac{1}{r^d}\phi\left(\frac{x}{r}\right)$$

(dan menghapus asumsi $\phi \geq 0$).
Selanjutnya, jika $\psi(x) := \sup_{|y|\geq|x|} |\phi(y)|$ terintegralkan, maka

$$\sup_{r>0} |(\phi_r * f)(x)| \leq C\, M_{HL} f(x)$$

untuk $f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ 1 \leq p \leq \infty$.

Lebih jauh, kita mempunyai

$$\|\phi_r * f - f\|_p \to 0, \quad r \to 0,$$

untuk $f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ 1 \leq p < \infty$, dan

$$\lim_{r\to 0}(\phi_r * f)(x) = f(x)$$

hampir di mana-mana, untuk $f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ 1 \leq p \leq \infty$.

Perhatikan bahwa Teorema Dasar Lebesgue merupakan kasus khusus, dengan mengambil $\phi = \frac{1}{m(B(0,1))}\chi_{B(0,1)}$.
$(M_{HL}f = \sup_{r>0} |\phi_r * f|.)$

Ingat bahwa solusi Persamaan Panas $u_t = u_{xx}$ pada $\mathbb{R}$, dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$, mempunyai solusi

$$u(x,t) = H_t * f(x)$$

dengan $H(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/4}$ dan $H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} H\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ (**Kernel Panas**).

Pada $\mathbb{R}^d$, Persamaan Panas berbentuk $u_t = \Delta_x u$ dengan $\Delta_x := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$ (**operator Laplace**). Solusinya adalah

$$u(x,t) = H_t * f(x)$$

dengan $H(x) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} e^{-|x|^2/4}$ dan $H_t(x) = \frac{1}{t^{d/2}} H\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$.

Karena $H_t(x)$ merupakan identitas hampiran, maka hasil-hasil tadi berlaku untuk solusi persamaan panas di atas.

Demikian pula halnya solusi Persamaan Laplace $\Delta_x u + u_{yy} = 0$ $(x \in \mathbb{R}^d,\ y > 0)$ dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$, dapat dinyatakan sebagai

$$u(x,y) = P_y * f(x)$$

dengan $P(x) = \frac{c_d}{(|x|^2+1)^{(d+1)/2}}$ dan $P_y(x) = \frac{1}{y^d} P\left(\frac{x}{y}\right)$ (**Kernel Poisson**).

Di sini $c_d = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}}$, sehingga $\int_{\mathbb{R}^d} P(x)\, dx = 1$.

Perihal Persamaan Gelombang, akan kita bahas secara khusus nanti pada bagian terakhir.

Selain operator maksimal, terdapat banyak operator penting lainnya yang dipelajari. Salah satu operator yang akan kita bahas sekarang adalah **operator integral fraksional** I_α yang diberikan oleh rumus

$$I_\alpha f(x) = |\cdot|^{\alpha-d} * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}}\, dy,$$

dengan $0 < \alpha < d$. Perhatikan bahwa $I_\alpha f$ terdefinisi setidaknya untuk fungsi f yang terbatas dan mempunyai tumpuan kompak (*compact support*) — `Soal Latihan 2`.

Dengan menghitung transformasi Fouriernya, kita mempunyai

$$\widehat{I_\alpha f}(\xi) = c_\alpha |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi).$$

Untuk $k \in \mathbb{N}$, jelas bahwa

$$\widehat{(-\Delta)^k f}(\xi) = (2\pi|\xi|)^{2k} \widehat{f}(\xi).$$

Karena itu $I_\alpha \sim (-\Delta)^{-\alpha/2}$. Khususnya, untuk $\alpha = 2 < d$, fungsi $u = I_2 f$ merupakan solusi (lemah) dari Persamaan Poisson $-\Delta u = f$, dikalikan dengan suatu konstanta.

Teorema berikut menyatakan bahwa I_α merupakan operator yang terbatas dari $L^p(\mathbb{R}^d)$ ke $L^q(\mathbb{R}^d)$ untuk suatu $q > p$. Persisnya, kita mempunyai:

Teorema. Untuk $1 < p < \frac{d}{\alpha}$, kita mempunyai

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C_{p,q}\|f\|_p,$$

dengan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$.

Ketaksamaan di atas dibuktikan dengan mendekomposisi integral $I_\alpha f(x)$ menjadi dua bagian: yang pertama adalah integral di sekitar x, yang kedua jauh dari x. Yang pertama dikontrol oleh fungsi maksimal Hardy-Littlewood, yang kedua oleh norm f.

Salah satu aplikasi dari teorema di atas adalah dalam menaksir solusi *Persamaan Poisson*:

$$\|u\|_q \leq C_p \|f\|_p,$$

dengan $q = pd/(d-2p)$.

Pembahasan lebih lanjut tentang operator integral fraksional I_α akan disampaikan oleh Dr. Idha Sihwaningrum pada seminar besok. (Dr. Eridani akan membahas operator integral lainnya.)

Operator berikutnya yang akan kita bahas di sini adalah *operator integral singular* I_u yang juga merupakan operator konvolusi, yang diberikan oleh rumus

$$I_u f(x) = K_u * f(x)$$

dengan $K_u(x) = C(u)|x|^{iu-d}$. Di sini $C(u)$ adalah konstanta yang bergantung hanya pada u sedemikian sehingga $\widehat{K}_u(\xi) = |\xi|^{-iu}$. Perhatikan bahwa

$$\widehat{I_u f}(\xi) = \widehat{K}_u(\xi)\widehat{f}(\xi) = |\xi|^{-iu}\widehat{f}(\xi).$$

Karena $||x|^{iu}| = |e^{iu\ln|x|}| = 1$ untuk tiap $x \neq 0$, kita mempunyai

$$\|I_u f\|_2 = \|\widehat{I_u f}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2,$$

yakni, I_u merupakan isometri pada $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Dengan menaksir $|K_u(x)|$ secara teliti, dapat ditunjukkan bahwa

$$\|I_u f\|_p \le C_p(1+|u|)^{d/2}\|f\|_p,$$

untuk $1 < p < \infty$.

Dari kedua ketaksamaan tadi, kita dapat memperoleh ketaksamaan berikut via interpolasi ala Marcinkiewicz:

$$\|I_u f\|_p \leq C_p(1+|u|)^{|d/p-d/2|}\|f\|_p.$$

Ketaksamaan ini kelak dapat dipakai untuk membuktikan keterbatasan operator maksimal permukaan bola, yang akan kita bahas pada bagian berikutnya.

Persamaan Gelombang pada $\mathbb{R}$:

$$u_{tt} = u_{xx},$$

mempunyai solusi $u = u(x,t)$ dengan

$$\widehat{u}(\xi,t) = A(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + B(\xi)\sin(2\pi|\xi|t),$$

dengan $A(\xi)$ dan $B(\xi)$ konstanta (bergantung pada ξ saja).
Jika u memenuhi syarat awal

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),$$

maka

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi),\ \widehat{u}_t(\xi,0) = \widehat{g}(\xi).$$

Dari sini kita peroleh

$$A(\xi) = \widehat{f}(\xi), \ 2\pi|\xi|B(\xi) = \widehat{g}(\xi).$$

Dengan demikian,

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}.$$

Ambil inversnya, kita dapatkan

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \left[\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right] e^{2\pi i x\xi} d\xi.$$

Dengan Kesamaan Plancherel dapat ditunjukkan bahwa energi total $E(t) = \int_{\mathbb{R}}(|u_t(x, t)|^2 + |u_x(x, t)|^2)\, dx$ konstan (tidak bergantung pada t) — `Soal Latihan 3`.

Catatan: Semua perhitungan di atas juga berlaku untuk Persamaan Gelombang pada $\mathbb{R}^d$

$$u_{tt} = \Delta_x u,$$

mengingat $\widehat{\Delta_x u}(\xi, t) = -(2\pi|\xi|)^2 \widehat{u}(\xi, t)$.

Untuk $d = 1$, solusi Persamaan Gelombang $u_{tt} = u_{xx}$ pada $[0, L]$ dengan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$ dan $u_t(x, 0) = g(x)$ mempunyai rumus eksplisit

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy\Big),$$

dengan f dan g telah diperluas ke seluruh $\mathbb{R}$ menjadi fungsi ganjil dan periodik dengan periode $2L$.

Rumus ini juga berlaku untuk Persamaan Gelombang pada $\mathbb{R}$ dengan data awal f dan g di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. (Anda tinggal menghitung transformasi Fouriernya dan membandingkan hasilnya dengan rumus sebelumnya.)

Perhatikan bahwa rumus di atas terdiri dari dua nilai 'rata-rata'. Yang pertama adalah nilai rata-rata f di kedua titik ujung interval $[x-t, x+t]$. Yang kedua adalah t kali nilai rata-rata integral g pada interval $[x-t, x+t]$, yakni $\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy$. Rumus di atas dapat ditulis ulang sebagai

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(tM_t f(x)) + tM_t g(x),$$

dengan $M_t f(x) = M_t^{HL} f(x) = \frac{1}{2t}\chi_{[-t,t]} * f$.

Untuk $d = 3$, kita ternyata mempunyai rumus yang serupa, tapi dengan rumus nilai rata-rata $M_t f$ yang berbeda.

Misalkan S^2 menyatakan permukaan bola satuan di $\mathbb{R}^3$. Kita definisikan nilai rata-rata f pada permukaan bola yang berpusat di x dan berjari-jari t sebagai

$$M_t f(x) = M_t^S f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x - t\gamma) d\sigma(\gamma),$$

dengan $d\sigma(\gamma)$ menyatakan elemen luas permukaan pada S^2. Karena luas permukaan bola satuan adalah 4π, maka $M_t^S f$ merupakan nilai rata-rata integral f pada permukaan bola yang berpusat di x dan berjari-jari t.

Dapat diperiksa bahwa untuk $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, maka $M_t^S f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ juga. Lebih jauh, $M_t^S f$ dapat diturunkan tak hingga kali terhadap t, dan para turunannya juga merupakan fungsi di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

$M_t^S f$ merupakan konvolusi f dengan $\mu = \frac{1}{4\pi}\sigma$ yang merupakan ukuran ternormalisasi pada permukaan bola S^2, yakni

$$M_t^S f(x) = \mu_t * f(x).$$

Lebih jauh kita mempunyai

$$\widehat{M_t^S f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t}.$$

Cata bahwa, untuk $t = 1$, $\frac{\sin(2\pi|\xi|)}{2\pi|\xi|}$ merupakan transformasi Fourier dari μ, dalam arti

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-2\pi i\xi\cdot\gamma} d\sigma(\gamma) = \frac{\sin(2\pi|\xi|)}{2\pi|\xi|}$$

(lihat [Stein & Shakarchi, 2003]).

Akibatnya, untuk $d = 3$, kita mempunyai teorema berikut:

Teorema. Solusi Persamaan Gelombang

$$u_{tt} = \Delta_x u$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = f(x) \text{ dan } u_t(x,0) = g(x)$$

adalah

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(tM_t f(x)) + tM_t g(x),$$

dengan $M_t f = M_t^S f$.

Bukti. Solusi persamaan gelombang $u_{tt} = \Delta_x u$ dengan syarat awal $u(x,0) = 0$ dan $u_t(x,0) = g(x)$ adalah

$$u_1(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\widehat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \right] e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = tM_t^S g(x).$$

Sementara itu, solusi persamaan gelombang $u_{tt} = \Delta_x u$ dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dan $u_t(x,0) = 0$ adalah

$$u_2(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\widehat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) \right] e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = \frac{\partial}{\partial t}(tM_t^S f(x)).$$

Jadi, $u = u_1 + u_2$ adalah solusi masalah nilai awal kita. $\square$

Kasus $d = 2$ tidak sesederhana seperti kasus $d = 1$ atau $d = 3$. Namun, solusi Persamaan Gelombang dengan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$ dan $u_t(x, 0) = g(x)$ mempunyai rumus yang serupa, yakni

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(tM_t f(x)) + tM_t g(x),$$

dengan $M_t f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{|y|\leq 1} f(x - ty)(1 - |y|^2)^{-1/2} dy$.

Perhatikan bahwa secara umum Prinsip Huygen berlaku: untuk setiap x dan t, nilai $u(x,t)$ ditentukan oleh nilai data awal pada $B(x,t)$.

Serupa (tapi tak sama) dengan fungsi maksimal Hardy-Littlewood, kita mempunyai **fungsi maksimal permukaan bola**

$$\mathcal{M}_S f(x) := \sup_{t>0} |M_t^S f(x)|.$$

Pada tahun 1976, E.M. Stein membuktikan keterbatasan operator M_S pada $L^p(\mathbb{R}^d)$ sebagai berikut:

Teorema. Untuk $d \geq 3$, berlaku

$$\|\mathcal{M}_S f\|_p \leq C_p \, \|f\|_p$$

asalkan $p > \frac{d}{d-1}$.

`Catatan`: J. Bourgain (1986) membuktikan bahwa ketaksamaan juga berlaku untuk $d = 2$.

Teorema di atas dapat dibuktikan dengan menuliskan

$$\mu(x) = P(x) + \int_{\mathbb{R}} A(u) K_u(x)\, du,$$

dengan $A(u) = O(1 + |u|)^{-d/2}$. Dari sini kita peroleh

$$\mu_t(x) = P_t(x) + \int_{\mathbb{R}} A(u) K_u(x) t^{-iu} du,$$

$$(\mu_t * f)(x) = (P_t * f)(x) + \int_{\mathbb{R}} A(u) I_u f(x) t^{-iu} du.$$

Akibatnya,

$$M_S f(x) \le C\, M_{HL} f(x) + \int_{\mathbb{R}} |A(u)||I_u f(x)|\, du.$$

Dari sini peroleh $\|M_S f\|_p \le C_p \|f\|_p$ untuk $p > d/(d-1)$.

Kita ingat bahwa $u(x,t) = tM_t^S f(x)$ merupakan solusi dari Persamaan Gelombang $u_{tt} = \Delta_x u$ pada $\mathbb{R}^3$ dengan syarat awal $u(x,0) = 0$ dan $u_t(x,0) = f(x)$. Berdasarkan teorema di atas, kita mempunyai

$$\left\| \sup_{t>0} \left| \frac{u(\cdot,t)}{t} \right| \right\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

untuk $p > \frac{3}{2}$.