Kesamaan Empat Formula Norm-n di Ruang Hilbert

S.M. Gozali[1] dan H. Gunawan

KK Analisis & Geometri FMIPA ITB Bandung

sumanang@students.itb.ac.id, hgunawan@math.itb.ac.id

Abstrak

Makalah ini membahas kesamaan empat formula norm-n di ruang Hilbert, yaitu norm-n standar, versi Gahler, versi Gunawan dan sebuah formula baru. Kesamaan tiga formula pertama di ruang barisan ℓ^2 akan ditinjau kembali. Kemudian dengan memanfaatkan kongruensi ruang Hilbert terhadap ruang barisan ℓ^2 kita mengklaim kesamaan tiga formula itu juga berlaku di ruang Hilbert. Selanjutnya kami memperkenalkan sebuah formula alternatif dan menunjukkan kesamaannya dengan formula Gahler. Oleh karena itu kita mempunyai empat formula berbeda di ruang Hilbert yang pada dasarnya sama.

Kata kunci: Norm-n, ruang Hilbert, kongruensi

1. Pendahuluan

Pada tahun 1960-an, Gahler memperkenalkan konsep norm-2 (lihat [1]). Jika X adalah ruang vektor berdimensi 2 atau lebih, Gahler mendefinisikan norm-2 $\|.,.\|$ sebagai fungsi bernilai real di $X \times X$ sehingga untuk semua $x, y, z \in X, \alpha \in R$ memenuhi semua sifat berikut:

i. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x, y bergantung linear
ii. $\|x, y\| = \|y, x\|$
iii. $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \, \|x, y\|$
iv. $\|x + z, y\| \leq \|x, y\| + \|z, y\|$

Selanjutnya, pasangan $(X, \|.,.\|)$ disebut ruang norm-2. Perlu dicatat bahwa secara geometris $\|x, y\|$ menyatakan luas jajar genjang yang direntang oleh x dan y.

Sebagai contoh, jika $(X, \|.\|)$ adalah ruang norm dan X' dual dari X, Gahler memberikan contoh norm-2

[1] Mahasiswa Program S3 Matematika ITB dan Staf Pengajar UPI

$$\|x,y\|^I = \sup_{\substack{f,g\in X' \\ \|f\|,\|g\|\le 1}} \left\{\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y) \end{vmatrix}\right\}.$$

Sementara itu, jika $(X,\langle .,.\rangle)$ suatu ruang hasil kali dalam, kita dapat mendefinisikan fungsi norm-2

$$\|x,y\|^S = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{1/2}.$$

Inilah yang kita sebut sebagai norm-2 standar.

Selanjutnya, kajian teori norm-2 ini mengantarkan pada perumusan konsep norm-*n*. Untuk ruang vektor real X dengan dim(X) ≥ n, norm-*n* di X didefinisikan sebagai fungsi $\|.,\dots,.\|$ di X^nyang memenuhi:

1. $\|x_1,\dots,x_n\| = 0$ jika dan hanya jika $x_1,\dots,x_n$ bergantung linear
2. $\|x_1,\dots,x_n\|$ invarian terhadap sebarang permutasi dari $\{1,\dots,n\}$
3. $\|\alpha x_1,\dots,x_n\| = |\alpha|\|x_1,\dots,x_n\|$ untuk sebarang $\alpha \in R$
4. $\|x+x',x_2,\dots,x_n\| \le \|x,x_2,\dots,x_n\| + \|x',x_2,\dots,x_n\|$

Dalam hal ini, $\|x_1,\dots,x_n\|$ dapat kita pandang sebagai volume paralelpipedium berdimensi-*n* di X yang direntang oleh $x_1,\dots,x_n$.

Serupa dengan contoh norm-2, jika X adalah ruang norm dengan dual X', norm-n versi Gahler berbentuk

$$\|x_1,\dots,x_n\|^I = \sup_{f_i\in X',\|f_i\|\le 1} \left\{\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}\right\}$$

Sementara itu, jika $(X,\langle .,.\rangle)$ suatu ruang hasil kali dalam maka kita dapat mendefinisikan norm-*n* standar

$$\|x_1,\dots,x_n\|^S = \sqrt{\det(\langle x_i,x_j\rangle)}.$$

Sekarang kita beralih ke ruang ℓ^p $(1/p + 1/q = 1)$. Di sini, kita dapat menerapkan norm-n versi Gahler, yaitu

$$\|x_1,\dots,x_n\|^I = \sup_{f_i\in \ell^q,\|f_i\|\le 1} \left\{\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}\right\}.$$

Terinspirasi oleh rumusan norm-2 di ℓ^2 (lihat [2]), Gunawan mengemukakan norm-n alternatif di ruang ℓ^p, yaitu

$$\|x_1, \dots, x_n\|^G = \left[\frac{1}{n!}\sum_{j_1} \dots \sum_{j_n} \left|\det\left(x_{ij_k}\right)\right|^p\right]^{1/p}.$$

2. Kesamaan empat formula norm-n di ruang Hilbert

Pada bagian ini kita akan melihat empat formula norm-n di ruang Hilbert. Tiga formula sudah kita kenal sebelumnya dan kami mengemukakan formula baru yang dapat dipandang sebagai hasil modifikasi dari versi Gahler. Tidak hanya itu formula baru ini ternyata sama dengan versi Gahler. Selanjutnya, dengan memanfaatkan hasil di ruang ℓ^2 kita akan menunjukkan bahwa keempat formula ini sama. Oleh karena itu kita akan meninjau kembali ketiga formula pertama di ruang ℓ^2.

Di ruang ℓ^2 paling tidak terdapat tiga formula norm-n. Pertama, dengan memandang ℓ^2 sebagai ruang hasil kali dalam, di ruang ini kita mempunyai norm-n standar

$$\|x_1, \dots, x_n\|^S = \sqrt{\det\,(\sum_k x_{ik}\, x_{jk})}.$$

Kedua, norm-n versi Gunawan

$$\|x_1, \dots, x_n\|^G := \left[\frac{1}{n!}\sum_{j_1} \dots \sum_{j_n} \left|\det\left(x_{ij_k}\right)\right|^2\right]^{1/2}.$$

Ketiga, dengan menggunakan teorema Riesz, norm-n versi Gahler berbentuk

$$\|x_1, \dots, x_n\|^I = \sup_{y_i \in \ell^2, \|y_i\| \le 1} \left\{ \begin{vmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, y_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, y_n \rangle \end{vmatrix} \right\}.$$

Di ruang ℓ^2 ketiga formula ini identik (lihat [5]).

Sekarang, misalkan X suatu ruang Hilbert terpisah (separable). Oleh karena itu, X mempunyai sistem ortonormal lengkap $\{e_1, e_2, \dots\}$. Berdasarkan teorema Fisher, X kongruen dengan ruang ℓ^2(lihat, [6]). Oleh karena itu di ruang ini pun kita mengklaim bahwa ketiga norm-n $\|.,\dots,.\|^S$, $\|.,\dots,.\|^G$, $\|.,\dots,.\|^I$ adalah sama.

Persisnya, karena X ruang hasil kali dalam kita mempunyai norm-n standar

$$\|x_1, \dots, x_n\|^S = \sqrt{\det\left(\langle x_i, x_j\rangle\right)}.$$

Berikutnya, dengan menganggap $x_i = (\alpha_{ij})$ dimana $x_i = \sum_{j=1} \alpha_{ij} e_j$, kita mempunyai norm-$n$ versi Gunawan

$$\|x_1, \dots, x_n\|^G := \left[\frac{1}{n!} \sum_{j_1} \dots \sum_{j_n} \left|\det\left(\alpha_{i j_k}\right)\right|^2\right]^{1/2}.$$

Sementara itu, kita juga mempunyai norm-n versi Gahler

$$\|x_1, \dots, x_n\|^I = \sup_{y_i \in X, \|y_i\| \leq 1} \left\{ \begin{vmatrix} \langle x_1, y_1\rangle & \cdots & \langle x_1, y_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y_1\rangle & \cdots & \langle x_n, y_n\rangle \end{vmatrix} \right\}.$$

Dengan menggunakan kongruensi X terhadap ruang ℓ^2, kita menyimpulkan bahwa di ruang Hilbert X pun ketiga norm-n $\|., \dots, .\|^S$, $\|., \dots, .\|^G$, $\|., \dots, .\|^I$ adalah sama.

Selanjutnya, kita akan melihat formula alternatif di X. Dalam hal ini kita mempunyai fakta berikut.

Fakta 1.

Misalkan $(X, \langle ., . \rangle)$ suatu ruang hasil kali dalam. Fungsi

$$\|x_1, \dots, x_n\|^D = \sup_{\substack{y_j \in X \\ \|y_1, \dots, y_n\|^S \leq 1}} \left\{ \begin{vmatrix} \langle x_1, y_1\rangle & \cdots & \langle x_1, y_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y_1\rangle & \cdots & \langle x_n, y_n\rangle \end{vmatrix} \right\}$$

memenuhi semua kondisi norm-n.

Bukti: Jika $x_1, \dots, x_n$ adalah vektor-vektor bergantung linear di X maka jelaslah bahwa $\|x_1, \dots, x_n\|^D = 0$. Sebaliknya, asumsikan bahwa $\|x_1, \dots, x_n\|^D = 0$. Ini berarti bahwa baris-baris matriks bergantung linear, sehingga kita menyimpulkan $x_1, \dots, x_n$ adalah vektor-vektor bergantung linear.

Selanjutnya, dengan menggunakan sifat-sifat determinan, serta mengacu pada pengambilan supremum untuk semua $\|y_1, \dots, y_n\|^S \leq 1$ kita mendapatkan sifat invarian $\|x_1, \dots, x_n\|^D$ terhadap sebarang permutasi dari $\{1,2, \dots, n\}$. Dengan alasan serupa kita menyimpulkan sifat $\|\alpha x_1, \dots, x_n\|^D = |\alpha| \, \|x_1, \dots, x_n\|^D$ untuk sebarang bilangan real α.

Terakhir, dengan menggunakan sifat determinan dan supremum kita menyimpulkan

$$\|x + x_1, \dots, x_n\|^D \leq \|x, \dots, x_n\|^D + \|x_1, \dots, x_n\|^D.$$

Berkaitan dengan formula baru ini kita mempunyai fakta menarik berikut ini.

Fakta 2.

Di ruang Hilbert terpisah X, kedua norm-n $\|.,\dots,.\|^I$ dan $\|.,\dots,.\|^D$ adalah sama.

Bukti:

Misalkan $y_1, \dots, y_n$ adalah elemen-elemen di X. Beradasarkan ketaksamaan Hadamard (lihat [3]), kita mempunyai

$$\|y_1, \dots, y_n\|^S \leq \|y_1\| \dots \|y_n\|.$$

Dengan demikian kita simpulkan

$$\|x_1, \dots, x_n\|^I \leq \|x_1, \dots, x_n\|^D.$$

Sebaliknya, jika $0 < \|x_1, \dots, x_n\|^S \leq 1$, berdasarkan ketaksamaan Cauchy-Schwarz yang diperumum (lihat [4]) kita mendapatkan

$$\begin{aligned} \det(\langle x_i, y_j \rangle) &\leq \sqrt{\det(\langle x_i, x_j \rangle)}\sqrt{\det(\langle y_i, y_j \rangle)} \\ &\leq \sqrt{\det(\langle x_i, x_j \rangle)} \\ &= \|x_1, \dots, x_n\|^S \\ &= \|x_1, \dots, x_n\|^I \end{aligned}$$

Oleh karena itu kita mempunyai,

$$\|x_1, \dots, x_n\|^D \leq \|x_1, \dots, x_n\|^I.$$

Dengan menggabungkan hasil terakhir ini beserta hasil sebelumnya maka kita menyimpulkan bahwa di ruang Hilbert separable X berlaku keempat formula norm- n $\|.,\dots,.\|^S, \|.,\dots,.\|^G, \|.,\dots,.\|^I, \|.,\dots,.\|^D$ adalah sama.

3. Penutup

Pada sebarang ruang vektor kita dapat mendefinisikan berbagai formula norm-n. Masalah yang kemudian mengemuka adalah apakah kesemua formula itu ekuivalen atau bahkan sama, meskipun formulanya berbeda. Untuk menjawab masalah seperti ini kita harus mengkaji lebih lanjut perihal semua formula itu sehingga kita mengetahui berbagai sifatnya.

Di ruang ℓ^2 kita telah melihat kesamaan tiga formula norm-n yang berbeda. Dengan memanfaatkan kongruensi ruang Hilbert dengan ruang ℓ^2 maka hal yang sama berlaku pula di ruang Hilbert. Selanjutnya kita telah melihat formula baru yang ternyata sama dengan formula Gahler. Dengan demikian kita mempunyai empat formula norm-n berbeda di ruang Hilbert yang telah kita tunjukkan kesamaannya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. Gahler. *Lineare 2-normierte r¨aume*. Math. Nachr. 28 (1964), 1–43.

[2] H. Gunawan. *The space of p-summable sequences and its natural n-norm*. Bull. Austral. Math. Soc. 64 (2001), 137-147.

[3] F.R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. AMS Chelsea Publishing Vol. 1 (2000), 252-253

[4] S. Kurepa. *On the Buniakowsky-Cauchy-Schwarz inequality*. Glasnik Matematicki, Vol. 1, No.2 (1966), 147-158

[5] T. Rangga. *Ruang Hasil Kali Dalam-n*. Tugas akhir sarjana. ITB. (2008).

[6] G. Cohen. *A Course in Modern Analysis and its Applications*. Cambridge University Press (2003) 306-307