# Tripel Pythagoras

*Oleh* : ***Hendra Gunawan, dosen Matematika ITB***

TRIPEL Pythagoras adalah tripel bilangan bulat positif *a, b,* dan *c* yang memenuhi persamaan $a^2 + b^2 = c^2$. Contoh tripel Pythagoras yang paling sederhana adalah 3, 4, dan 5, atau 5, 12, dan 13, sebagaimana sering dibahas di SLTP.Pythagoras adalah seorang filsuf dan matematikawan Yunani kuno yang lahir sekitar tahun 580 SM.

Nama tripel Pythagoras diberikan karena Pythagoras, atau setidaknya para muridnya, diyakini sebagai orang yang pertama kali membuktikan bahwa persamaan $a^2 + b^2 = c^2$ sesungguhnya berlaku secara umum pada sembarang segitiga siku-siku dengan sisi-sisi tegak *a* dan *b* dan sisi miring *c* (di sini *a*, *b*, dan *c* tidak harus merupakan bilangan bulat, tetapi sembarang bilangan *real* positif). Dalil ini pun kemudian dikenal sebagai **Dalil Pythagoras**.Namun, sesungguhnya, tripel Pythagoras sudah dikenal oleh orang Babylonia sejak tahun 1600 SM. Pengetahuan tentang tripel Pythagoras diperlukan, misalnya, dalam tukar-menukar (barter) tanah pada zaman itu. Seseorang yang mempunyai sebidang tanah berukuran 50 x 50 meter kuadrat, misalnya, dapat menukarnya dengan dua bidang tanah berukuran 30 x 30 dan 40 x 40 meter kuadrat.

Pada zaman itu, orang Babylonia bahkan sudah tahu pula bagaimana menemukan tripel Pythagoras. Sebagai contoh, mereka tahu bahwa jika *m* ganjil, maka *m*, 1/2 ($m^2$ - 1), dan 1/2 ($m^2$ + 1) merupakan tripel Pythagoras; dan jika *m* genap, maka 2*m*, $m^2 - 1$, dan $m^2 + 1$ merupakan tripel Pythagoras.

Nah, menelusuri cara berpikir orang zaman dulu, tulisan ini akan membahas secara detail bagaimana menemukan tripel Pythagoras tersebut.

Pertama catat bahwa jika *a*, *b*, dan *c* merupakan tripel Pythagoras dan *k* sembarang bilangan bulat positif, maka *ka*, *kb*, dan *kc* juga merupakan tripel Pythagoras, karena $(ka)^2 + (kb)^2 = k^2 (a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2$. Oleh karena itu, kita cukup mencari **tripel Pythagoras dasar**, yakni tripel bilangan bulat positif *a*, *b*, dan *c*, yang tidak mempunyai faktor sekutu selain 1 dan memenuhi persamaan $a^2 + b^2 = c^2$. Sebagai contoh, 3, 4, dan 5 merupakan tripel Pythagoras dasar, sedangkan 6, 8, dan 10 bukan (karena tripel terakhir ini mempunyai faktor sekutu selain 1, yakni 2).

Untuk selanjutnya, asumsikan *a*, *b*, dan *c* merupakan tripel Pythagoras dasar. Kita sekarang akan mempelajari karakteristik atau sifat-sifat ketiga bilangan tersebut.

*Sifat 1: a dan b tidak mungkin kedua-duanya genap*.

Bukti: Jika *a* dan *b* genap, maka *c* juga akan genap. Dalam hal ini, *a*, *b*, dan *c* mempunyai faktor sekutu 2. Ini bertentangan dengan asumsi bahwa *a*, *b*, dan *c* tidak mempunyai faktor sekutu selain 1. (QED).

*Sifat 2: a dan b tidak mungkin kedua-duanya ganjil.*

Bukti: Jika $a = 2m + 1$ dan $b = 2n + 1$, maka $a^2 + b^2 = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2$, sehingga sisa hasil bagi $a^2 + b^2$ dengan 4 adalah 2. Sementara itu, sisa hasil bagi $c^2$ dengan 4 adalah 0 atau 1. Jadi tidak mungkin $a^2 + b^2 = c^2$. (QED).

Berdasarkan kedua pengamatan di atas, salah satu di antara *a* dan *b* mestilah genap dan yang lainnya mestilah ganjil. Dengan demikian, kita peroleh sifat berikut.

*Sifat 3: c ganjil*.

Bukti: Jika *a* genap dan *b* ganjil, maka $a^2$ genap dan $b^2$ ganjil. Karena itu $c^2$ ganjil, dan sebagai akibatnya *c* juga ganjil. Demikian pula jika *a* ganjil dan *b* genap, maka *c* ganjil. (QED).

Untuk selanjutnya, asumsikan *a* genap, *b* ganjil, dan *c* ganjil. Dalam hal ini kita peroleh sifat berikut.

*Sifat 4:* $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, *dan* $c = m^2 + n^2$, *dengan* $m > n$ *dan m dan n tidak mempunyai faktor sekutu selain 1.*

Bukti: Tulis $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$. Berdasarkan asumsi di atas, kita tahu bahwa $c - b$ dan $c + b$ genap. Selanjutnya tinjau 1/2 ($c - b$) dan 1/2 ($c + b$). Akan kita tunjukkan bahwa faktor sekutu terbesar dari kedua bilangan ini adalah 1.

Untuk itu, andaikan 1/2 ($c - b$) dan 1/2 ($c + b$) mempunyai faktor sekutu $k > 1$. Dalam hal ini terdapat *p* dan *q* sedemikian sehingga $c - b = 2kq$ dan $c + b = 2kp$. Dari sini kita peroleh $c = k(p + q)$ dan $b = k (p - q)$. Sementara itu, $a^2 = 4k^2pq$. Dengan demikian *pq* mestilah merupakan kuadrat sempurna, katakan $pq = r^2$. Akibatnya, $a = 2kr$, dan karena itu *a*, *b*, dan *c* mempunyai faktor sekutu $k > 1$. Ini bertentangan dengan asumsi bahwa *a*, *b*, dan *c* tidak mempunyai faktor sekutu selain 1. Dengan demikian 1/2 ($c - b$) dan 1/2 ($c + b$) tidak mungkin mempunyai faktor sekutu selain 1.

Sekarang misalkan $a = 2r$ (ingat: *a* genap). Maka, $r^2$ = 1/2 ($c - b$) . 1/2 ($c + b$), sehingga mestilah 1/2 ($c - b$) dan 1/2 ($c + b$) merupakan kuadrat sempurna, katakan 1/2 ($c - b$) = $n^2$ dan 1/2 ($c + b$) = $m^2$, dengan $m > n$ dan *m* dan *n* tidak mempunyai faktor sekutu selain 1. Dari sini kita peroleh $c = m^2 + n^2$, $b = m^2 - n^2$, dan $a = 2mn$. (QED)

Hasil terakhir mengatakan jika *a*, *b*, dan *c* merupakan tripel Pythagoras dasar, maka *a*, *b*, dan *c* mestilah memenuhi Sifat 4. Sebaliknya tidak berlaku: Jika *a*, *b*, dan *c* memenuhi Sifat 4, maka *a*, *b*, dan *c* hanya merupakan tripel Pythagoras, belum tentu merupakan tripel Pythagoras dasar. Sebagai contoh, untuk *m* = 3 dan

$n = 1$, kita peroleh $a = 6$, $b = 8$, dan $c = 10$. Untuk memperoleh tripel Pythagoras dasar, kita harus membaginya dengan faktor sekutu terbesar.

Sifat 4 lebih dikenal sebagai Dalil Tripel Pythagoras. Berbeda dengan **Dalil Pythagoras**, dalil ini tidak berurusan dengan geometri (baca: segitiga siku-siku). Seperti kita lihat di atas, pembuktian dalil ini murni berdasarkan sifat-sifat bilangan bulat.

Berdasarkan penemuan arkeologi, sejarah mencatat bahwa-selain orang Babylonia-orang Mesir kuno pun sudah memiliki pengetahuan tentang bilangan dan geometri. Namun, orang Yunani kunolah yang mampu melihat kaitan yang erat di antara keduanya. Bahkan, dipelopori oleh Pythagoras, orang Yunani kuno pulalah yang memperkenalkan aksioma, postulat, dalil, teorema dan pembuktian, seperti yang kita kenal hingga sekarang ini dalam matematika.

Sedikit catatan tentang pembuktian. Salah satu cara pembuktian yang cukup sering dilakukan dalam matematika adalah **pembuktian dengan kontradiksi**, yang d kenal pula sebagai *reductio ad absurdum*. Cara ini digemari, misalnya, oleh Euclides sekitar tahun 300 SM. Prinsipnya sederhana saja: jika dengan menyangkal bahwa pernyataan *P* benar (yakni dengan mengandaikan bahwa *P* salah) ternyata muncul suatu kontradiksi, maka kita simpulkan bahwa *P* mestilah benar. Sebagai contoh, pembuktian Sifat 1 dan 2, serta sebagian dari Sifat 4, merupakan pembuktian dengan kontradiksi.

**(Hendra Gunawan, dosen Matematika ITB).**