Catatan Kuliah

MA1121 Pengantar Matematika

Oleh

Hendra Gunawan

KK Analisis & Geometri
FMIPA-ITB

Bandung, Desember 2005

PENGANTAR

Matakuliah MA1121 Pengantar Matematika I merupakan jembatan antara matematika informal dengan matematika formal. Melalui matakuliah ini mahasiswa diperkenalkan (kembali) kepada konsep-konsep dasar yang merupakan fondasi matematika. Konsep-konsep dasar tersebut mencakup: bilangan, himpunan, pemetaan, dan proposisi. Melalui matakuliah ini, keterampilan dan kepercayaan diri mahasiswa ketika harus bekerja dengan konsep- konsep tersebut diharapkan terbangun. Selain itu, motivasi mereka untuk mempelajari matematika lebih lanjut juga tumbuh.

Secara umum, setelah mengikuti kuliah ini, mahasiswa diharapkan dapat:

1. memahami konsep-konsep yang berkaitan dengan bilangan, himpunan, pemetaan, proposisi, dan kuantor;
2. memiliki kemampuan untuk bekerja dengan konsep-konsep tersebut dalam memahami materi matematika yang telah dikenalnya;
3. melakukan pernalaran yang melibatkan argumentasi satu atau dua-langkah;
4. memiliki sikap kritis dan cermat dalam bekerja matematika.

Perkuliahan di kelas dirancang dengan pendekatan *problem-based learning (PBL)*, yakni: diberikan suatu masalah (sederhana, tetapi non-rutin), mahasiswa diberikan waktu untuk memecahkannya dan mengkomunikasikan pemecahannya. Untuk mendukung terlaksananya PBL, ceramah dari dosen tetap diberikan. Kemudian, dalam bekerja, mahasiswa dibagi atas kelompok, sehingga mereka dapat berdiskusi dan bekerjasama dalam memecahkan masalah yang diberikan. Hasil diskusi kelompok dipresentasikan oleh seorang anggota/wakil kelompok di depan kelas. (Yang maju ke depan akan dipilih oleh dosen sedemikian sehingga tiap mahasiswa mempunyai kesempatan yang sama.) Evaluasi akan didasarkan pada hasil kerja mahasiswa selama perkuliahan.

Masalah yang diberikan dipilih dari berbagai sumber, di antaranya adalah buku teks berikut:

1. John P. D'Angelo & Douglas B. West, "Mathematical Thinking: Problem Solving and Proofs", 2nd ed., Prentice-Hall, 2000.
2. A. Gardiner, "Discovering Mathematics: The Art of Investigation", Oxford Univ. Press, 1987.
3. G. Polya, "Mathematical Discovery", John Wiley & Sons, 1962.
4. W.S. Anglin, "Mathematics: A Concise History and Philosophy", Springer, 1994.

Bandung, Desember 2005
H.G.

Daftar Isi

`Catatan`. Setiap topik disertai dengan solusi dari mahasiswa, kecuali Topik 4, 8, dan 10. Untuk Topik 4, ada renungan dari mahasiswa; sementara untuk Topik 10, kami tampilkan tugas makalah dari mahasiswa.

1. Pecahan Satuan

Pecahan satuan adalah pecahan yang berbentuk $\frac{1}{n}$, dengan n bilangan bulat positif (bilangan asli). Dari penemuan arkeologi, diketahui bahwa orang Mesir Kuno senantiasa menyatakan pecahan (kecuali $\frac{2}{3}$) sebagai jumlah dari beberapa pecahan satuan. Sebagai contoh, mereka akan menulis

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

dan

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{130}.$$

`Masalah 1`. Nyatakan $\frac{3}{7}$ sebagai jumlah beberapa pecahan satuan.

Pada 1880, J.J. Sylvester membuktikan bahwa setiap pecahan murni $\frac{a}{b}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah beberapa pecahan satuan berbeda. ($\frac{a}{b}$ disebut pecahan murni bila $a < b$.) Buktinya menggunakan prinsip induksi matematika. Pertama, jelas bahwa pernyataan tersebut benar untuk $a = 1$. Sekarang misalkan $a > 1$ dan asumsikan bahwa pernyataan benar untuk pecahan murni dengan pembilang $< a$. Misalkan $\frac{1}{q}$ adalah pecahan satuan terbesar yang lebih kecil daripada $\frac{a}{b}$. Maka

$$\frac{1}{q} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}.$$

Di sini $0 < aq - b < a$, dan

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \frac{aq-b}{bq}.$$

Menurut asumsi kita di atas, $\frac{aq-b}{bq}$ merupakan jumlah dari beberapa pecahan satuan berbeda. Lebih jauh, pecahan-pecahan satuan tersebut berbeda dari $\frac{1}{q}$ karena

$$\frac{1}{q} > \frac{aq-b}{bq}.$$

Dengan demikian kita telah membuktikan bahwa $\frac{a}{b}$ merupakan jumlah beberapa pecahan satuan berbeda, yakni $\frac{1}{q}$ dan pecahan-pecahan satuan yang jumlahnya sama dengan $\frac{aq-b}{bq}$.

Bukti di atas memberi kita cara untuk menyatakan suatu pecahan murni sebagai jumlah beberapa pecahan satuan berbeda. Langkah pertama adalah mencari pecahan satuan terbesar yang lebih kecil daripada pecahan yang diberikan, kemudian menghitung selisihnya, dan seterusnya.

`Masalah 2`. Nyatakan $\frac{8}{11}$ sebagai jumlah beberapa pecahan satuan berbeda.

Pada tahun 1980-an, Paul Erdös mengemukakan masalah bagaimana menyatakan $\frac{4}{n}$ sebagai jumlah (tak lebih daripada) tiga pecahan satuan berbeda.

`Masalah 3.` Nyatakan $\frac{4}{17}$ sebagai jumlah (tak lebih daripada) tiga pecahan satuan berbeda.

`Masalah 4.` Nyatakan $\frac{4}{4m+2}$ sebagai jumlah (tak lebih daripada) tiga pecahan satuan berbeda.

`Masalah 5.` Nyatakan $\frac{4}{4m+3}$ sebagai jumlah (tak lebih daripada) tiga pecahan satuan berbeda.

`Masalah 6.` Peroleh suatu bentuk umum pecahan dengan pembilang sama dengan 4 (selain $\frac{4}{4m+2}$ dan $\frac{4}{4m+3}$) yang dapat dinyatakan sebagai jumlah (tak lebih daripada) tiga pecahan satuan berbeda.

2. Membagi ruas garis menjadi n bagian sama panjang

Terkait dengan pecahan satuan $\frac{1}{n}$ adalah permasalahan membagi sebuah ruas garis menjadi n bagian sama panjang.

`Masalah 1.` Diberikan sebuah ruas garis, sebutlah AB, bagaimana kita dapat membaginya menjadi 2 bagian sama panjang, hanya dengan menggunakan penggaris (tanpa ukuran) dan jangka?

Masalah ini cukup mudah dipecahkan. Pertama, kita gunakan jangka untuk membuat lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r = panjang ruas garis AB. Lalu kita buat lingkaran dengan pusat B dan jari-jari r juga. Kedua lingkaran yang dihasilkan akan berpotongan di dua titik. Bila kita tarik garis yang menghubungkan kedua titik potong tersebut, maka garis ini akan membagi ruas garis AB atas dua bagian yang sama panjang. (Coba lakukan dan dukung dengan argumentasi yang absah.)

`Masalah 2.` Diberikan sebuah ruas garis AB, bagaimana kita dapat membaginya menjadi n bagian sama panjang, hanya dengan menggunakan penggaris (tanpa ukuran) dan jangka?

Untuk dapat memecahkan Masalah 2, kita harus memecahkan masalah berikut terlebih dahulu:

`Masalah 3.` Diberikan sebuah garis AB dan sebuah titik P di luar garis AB, bagaimana kita dapat menarik garis yang melalui titik P dan sejajar dengan garis AB, hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka?

Setelah berhasil memecahkan Masalah 3, coba pecahkan Masalah 2.

3. The Last Stones

The Last Stones adalah sebuah permainan menggunakan batu (atau sesuatu yang kita anggap batu), yang dimainkan oleh 2 orang. Dimulai dengan 10 batu, misalkan, kedua pemain bergantian mengambil batu tetapi hanya diperbolehkan mengambil 1, 2, atau 3 batu. Selain itu, pada setiap pengambilan, pemain tidak diperbolehkan mengambil jumlah yang sama dengan pemain sebelumnya. Pemain yang mengambil batu terakhir atau yang dapat membuat pemain lain mati langkah adalah pemenangnya.

Untuk memahami permainan ini, cobalah mainkan permainan ini beberapa kali dan perhatikan apa yang terjadi. Setelah itu coba pecahkan masalah berikut.

`Masalah 1.` Adakah strategi untuk pemain pertama agar ia selalu menang? Atau, apakah pemain kedua akan selalu menang, berapapun batu yang diambil oleh pemain pertama? Jelaskan strategi tersebut, bila ada.

`Masalah 2.` Jika banyaknya batu pada awal permainan adalah 14, pemain manakah yang akan selalu menang? Jelaskan strateginya.

`Masalah 3.` Jika banyaknya batu pada awal permainan adalah 20, pemain manakah yang akan selalu menang? Jelaskan strateginya.

Aturan pengambilan pada permainan The Last Stones dapat kita ganti. Dimulai dengan 10 batu, misalkan, kedua pemain bergantian mengambil 1 atau 3 batu, dan diperbolehkan mengambil batu sama banyaknya dengan pemain sebelumnya.

`Masalah 4.` Dengan aturan baru ini, siapakah yang akan selalu menang? Jelaskan strateginya.

`Masalah 5.` Jika banyaknya batu pada awal permainan adalah n, kapankah dengan aturan baru ini pemain pertama akan selalu menang? Jelaskan strateginya.

`Renungan.` Dengan mengerjakan permasalahan di atas, konsep dan kemampuan matematika apa saja yang anda pelajari? Sejauh mana konsep dan kemampuan tersebut anda kuasai dalam skala 1-4? [1 = belum dikuasai sama sekali, 2 = sudah dikuasai sedikit, 3 = sudah dikuasai dengan baik, 4 = sudah dikuasai dengan baik sekali.] Buat daftar konsep dan kemampuan matematika yang anda pelajari beserta skalanya. Selain itu, silakan tuliskan apa yang anda dapatkan melalui permainan The Last Stones.

4. Vektor-8

Dua kalimat berikut menerangkan dirinya sendiri:

- Dalam kalimat ini ada tiga puluh enam huruf.
- Kalimat ini terdiri dari 37 karakter.

Dapatkah anda membuat kalimat seperti di atas?

Sekarang kita ingin menyusun 'kalimat' matematika yang menerangkan dirinya sendiri, yang dinyatakan sebagai masalah berikut.

`Masalah Vektor-8.` Tentukan vektor $n_0,\ n_1, \ldots, n_7$ yang terdiri dari 8 bilangan bulat tak negatif, dengan sifat sebagai berikut:

- n_0 menyatakan banyaknya angka 0 yang muncul dalam vektor tersebut;
- n_1 menyatakan banyaknya angka 1 yang muncul dalam vektor tersebut;

dan seterusnya.

Sebelum memecahkan Masalah Vektor-8, coba pecahkan terlebih dahulu masalah berikut sebagai pemanasan.

`Masalah 1.` Apakah ada vektor yang hanya terdiri dari 1 angka, yakni n_0, dengan n_0 menyatakan banyaknya angka 0 yang muncul dalam vektor tersebut?

`Masalah 2.` Apakah ada vektor yang terdiri dari 2 angka, yakni $n_0,\ n_1$, dengan n_0 menyatakan banyaknya angka 0 dan n_1 menyatakan banyaknya angka 1 yang muncul dalam vektor tersebut?

`Masalah 3.` Pecahkan masalah yang serupa dengan Masalah 1 dan 2, tetapi untuk vektor yang terdiri dari (a) 3 angka, (b) 4 angka.

`Masalah 4.` Kembali ke masalah Vektor-8, untuk dapat memecahkannya, cobalah jawab terlebih dahulu pertanyaan berikut:

(a) Apakah $n_4,\ n_5,\ n_6$ dan n_7 mungkin semuanya 0?
(b) Apakah $n_5,\ n_6$ dan n_7 harus 0?
(c) Berapakah n_4?
(d) Berapakah n_1?

Akhirnya, ada berapa banyak Vektor-8 $n_0,\ n_1, \ldots,\ n_7$ dengan n_i menyatakan banyaknya angka i yang muncul dalam vektor tersebut?

`Renungan.` Seperti biasa, tuliskan hasil renungan anda.

5. Misteri 1089

Ambil sebuah bilangan tiga-angka, dengan angka pertama berbeda dari angka ketiga. Sebutlah bilangan tersebut abc dengan $a \neq c$. Dengan membalik bilangan tersebut, anda mempunyai bilangan lain cba. Sekarang kurangi yang besar dengan yang kecil (jika $abc > cba$, maka anda hitung $abc - cba$; jika $abc < cba$, maka anda hitung $cba - abc$). Sebutlah hasilnya def. Selanjutnya hitung $def + fed$. Berapakah hasilnya?

Cobalah dengan beberapa bilangan tiga-angka lainnya. Apakah hasilnya selalu sama?

`Masalah 1.` Buktikan dengan menggunakan pengetahuan anda tentang bilangan bahwa hasilnya selalu sama dengan 1089.

`Masalah 2.` Selidiki apa yang terjadi bila anda lakukan hal yang serupa terhadap bilangan tiga-angka abc_9 (dalam basis 9), dengan $a \neq c$.

`Masalah 3.` Selidiki apa yang terjadi bila anda lakukan hal yang serupa terhadap bilangan tiga-angka abc_8 (dalam basis 8), dengan $a \neq c$.

`Masalah 4.` Apa yang terjadi bila anda lakukan hal yang serupa terhadap bilangan empat-angka $abcd$ (dalam basis 10)? [Petunjuk: Jangan terlalu cepat mengambil kesimpulan!]

`Renungan`. Seperti biasa, tuliskan hasil renungan anda.

6. Memaksimumkan Hasil Kali

`Masalah`. Uraikan 1000 sebagai jumlah dari sejumlah bilangan bulat positif, katakanlah

$$1000 = a_1 + \ldots + a_n,$$

sedemikian sehingga hasil kali $a_1 \times \cdots \times a_n$ maksimum.

`Renungan`. Setelah memecahkan masalah di atas, tuliskan hasil renungan anda.

7. Tabung Paling Ekonomis

`Masalah`. Tentukan ukuran tabung yang paling ekonomis.

`Renungan`. Setelah memecahkan masalah di atas, tuliskan hasil renungan anda.

8. Berapa banyak anggotanya?

Dua himpunan dikatakan “mempunyai anggota sama banyaknya”, atau “mempunyai kardinalitas yang sama”, apabila terdapat pemetaan 1-1 dan *pada* dari satu himpunan ke himpunan lainnya. Sebagai latihan, tunjukkan bahwa kedua pasang himpunan berikut mempunyai kardinalitas yang sama:

(a) $\mathbf{Z}$ dan $\mathbf{N}$. (b) $\mathbf{R}$ dan $(-1, 1)$.

Di sini $\mathbf{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli, $\mathbf{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat, dan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real.

Himpunan yang mempunyai kardinalitas sama dengan $\mathbf{N}$ dikatakan *terbilang*.

`Soal 1`. Tunjukkan bahwa himpunan semua bilangan rasional, yang dilambangkan dengan $\mathbf{Q}$, merupakan himpunan terbilang.

`Soal 2`. Apakah $\mathbf{R}$ terbilang?

9. Himpunan Cantor

Akan dikonstruksi suatu himpunan bagian dari selang $F_0 := [0, 1]$ sebagai berikut: Pertama buang selang $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ dari F_0, dan sebut himpunan sisanya F_1.

$0 \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{2}{3} \qquad 1$

$$F_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1]$$

Kemudian buang selang $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ dan $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ dari F_1, dan sebut himpunan sisanya F_2. Ulangi proses ini: buang selang bagian tengah yang panjangnya $(\frac{1}{3})^{n+1}$ dari tiap selang yang membentuk F_n, dan sebut himpunan sisanya F_{n+1}. Dengan melanjutkan proses ini terus-menerus, kita peroleh **himpunan Cantor**:

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n.$$

Jelas bahwa $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \ldots$ merupakan anggota F.

Masalah 1. Adakah anggota F selain bilangan-bilangan tadi?

Untuk memecahkan masalah ini, cobalah kerjakan soal-soal berikut terlebih dahulu.

Soal 1. Tunjukkan bahwa $\frac{1}{4} \in F$; lalu simpulkan bahwa $\frac{3}{4} \in F$.

Soal 2. Nyatakan $\frac{1}{4}$ dan $\frac{3}{4}$ sebagai bilangan basis 3 yang berbentuk $0.a_1a_2a_3\ldots$ dengan $a_i = 0, 1$, atau 2 untuk tiap $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Soal 3. Peroleh anggota F selain $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$, dan bilangan-bilangan di atas tadi.

Soal 4. Apakah yang dapat anda katakan tentang anggota F sebagai bilangan basis 3?

Masalah 2. Berapa banyakkah anggota F? Apakah F terbilang atau tak terbilang?

Renungan. Seperti biasa, tuliskan hasil renungan anda.

10. Berapakah nilai π?

Rumus keliling lingkaran berjari-jari r adalah $K = 2\pi r$. Tetapi, berapakah nilai π? Dengan menggambar segienam beraturan di dalam lingkaran, jelas bahwa $\pi > 3$; dan dengan menggambar bujursangkar yang memuat lingkaran, kita juga tahu bahwa $\pi < 4$. Jadi, mestilah $3 < \pi < 4$. Tetapi berapa persisnya nilai π?

Di SD, siswa menggunakan hampiran $\pi \approx \frac{22}{7}$. Di SMP, hampiran $\pi = 3,14$ lebih sering digunakan. Nilai π sesungguhnya terletak di antara kedua bilangan tersebut, yakni $3,14 < \pi < \frac{22}{7}$. Archimedes (287-212 SM) menunjukkan bahwa

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

dengan menggunakan segibanyak beraturan di dalam lingkaran dan yang memuat lingkaran. Jika diambil nilai tengahnya, maka kita peroleh hampiran $\pi \approx 3,1418$.

Selain Archimedes, tercatat beberapa matematikawan lainnya yang juga memberikan nilai hampiran untuk π, yakni:

Ptolemy (150 SM): 3.1416.

Zu Chongzhi (430-501 SM): $\frac{355}{113}$.

al-Khwarizmi ($\pm$ 800): 3.1416.

al-Khasi ($\pm$ 1430): 14 angka di belakang koma.

Viete (1540-1603): 9 angka di belakang koma.

Roomen (1561-1615): 17 angka di belakang koma.

Van Ceulen ($\pm$ 1600): 35 angka di belakang koma.

Berbagai hampiran untuk π dapat diperoleh melalui deret, seperti yang ditemukan oleh Wallis (1616-1703):

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3.3.5.5.7.\dots}{2.2.4.4.6.6.\dots}$$

dan oleh Leibniz (1646-1716) atau Gregory (1638-1675):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Gregory memperoleh hampiran di atas melalui deret Taylor untuk $\arctan x$, yakni

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad -1 \le x \le 1.$$

Dengan deret semacam ini, kita dapat memperoleh hampiran untuk π hingga sejumlah angka di belakang koma, misalnya $\pi \approx 3,14159265358979323846264\dots$.

Berikut adalah beberapa soal yang berkaitan dengan π, yang dapat anda kerjakan.

`Soal 1`. Tunjukkan bahwa $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$.

`Soal 2`. Tunjukkan bahwa $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$.

`Soal 3.` Jika kita menggunakan rumus pada Soal 1 atau Soal 2 dan deret Taylor untuk $\arctan x$, maka kita akan memperoleh hampiran untuk π. Apa kelebihannya dibandingkan dengan hampiran Gregory?

Selain soal-soal seperti di atas, banyak pula masalah tentang π, seperti:

`Masalah 1`. Apakah tiap angka $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ muncul tak terhingga sering dalam uraian desimal π?

`Masalah 2`. Apakah tiap angka $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ muncul "sama seringnya" dalam uraian desimal π?

Bila anda dapat memecahkan Masalah 1 atau 2, anda akan terkenal di dunia!

[Bahan kuliah ini disadur dari *A history of Pi*, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_through_the_ages.html.]