MA2111 PENGANTAR MATEMATIKA

Semester I, Tahun 2015/2016

Hendra Gunawan

8

KUANTOR V: KUANTOR MAJEMUK (KUANTOR BERSARANG)

Pernyataan Berkuantor Majemuk

Pada bab-bab sebelumnya kita telah membahas pernyataan berkuantor eksistensial dan universal, tetapi tidak keduanya sekaligus. Pada bab ini, kita akan mempelajari **pernyataan berkuantor majemuk**, yakni pernyataan yang mengandung dua atau lebih kuantor.

Contoh Pernyataan Berkuantor Majemuk

1. Untuk setiap bilangan real x dengan $0 \le x \le 1$, terdapat bilangan real y dengan $-1 \le y \le 1$ sedemikian sehingga $x + y^2 = 1$.
2. Terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S$ berlaku $x < M$.
3. Untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x dgn $|x - 1| < \delta$ berlaku $|x^2 - 1| < \varepsilon$.

Anatomi Pernyataan

Pada pernyataan

"Untuk setiap bilangan real x dengan $0 \le x \le 1$, terdapat bilangan real y dengan $-1 \le y \le 1$ sedemikian sehingga $x + y^2 = 1$"

kita berurusan dengan

Objek	: bilangan real x
Sifat tertentu	: $0 \le x \le 1$
Sesuatu berlaku	: terdapat bilangan real y dengan $-1 \le y \le 1$ sedemikian sehingga $x + y^2 = 1$

Pada “Sesuatu yang Berlaku”, yakni

“terdapat bilangan real y dengan $-1 \leq y \leq 1$ sedemikian sehingga $x + y^2 = 1$”

kita berurusan dengan

Objek : bilangan real y

Sifat tertentu : $-1 \leq y \leq 1$

Sesuatu berlaku : $x + y^2 = 1$

Teorema Terakhir Fermat

Untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$, tidak ada bilangan asli a, b, dan c yang memenuhi persamaan $a^n + b^n = c^n$.

SETARA DENGAN

Untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$, untuk setiap bilangan asli a, b, dan c, berlaku $a^n + b^n \neq c^n$.

Mana yang Benar?

Untuk setiap bilangan real x terdapat bilangan asli n sedemikian sehingga $x < n$.

ATAU

Terdapat bilangan asli n sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x berlaku $x < n$.

Apa Bedanya?

Untuk setiap bilangan real M terdapat $x \in S$ sedemikian sehingga $x < M$.

DENGAN

Terdapat bilangan real M sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S$ berlaku $x < M$.

Contoh 1

Buktikan bahwa fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ bersifat ***onto***, yakni: untuk setiap bilangan real y terdapat bilangan real x sedemikian sehingga $f(x) = y$.

Bukti. Perhatikan bahwa $f(x) = (x + 1)^3 – 1$. Ambil $y \in \mathbf{R}$ sembarang. Kita harus menemukan $x \in \mathbf{R}$ sedemikian sehingga $f(x) = (x + 1)^3 – 1 = y$. Ini tidak terlalu sulit, pilih saja $x = (y + 1)^{⅓} – 1$; maka $f(x) = y$. [QED]

Contoh 2

Buktikan bhw himpunan $S = \{1, 3/2, 5/3, 7/4, \ldots\}$ terbatas di atas, yakni terdapat bilangan real b sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S$ berlaku $x \leq b$.

SOAL

1. Diketahui dua pernyataan:

   P1 : Untuk setiap objek O1 dengan sifat S1 terdapat objek O2 dengan sifat S2 sedemikian sehingga X berlaku.

   P2 : Terdapat objek O1 dengan sifat S1 sedemikian sehingga untuk setiap objek O2 dengan sifat S2, kondisi X berlaku.

   Berikan contoh objek O1 dan O2, sifat S1 dan S2, serta kondisi X, sedemikian sehingga

   (a) P1 benar dan P2 salah.

   (b) P1 salah dan P2 benar.

SOAL

2. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real $y > 2$ terdapat bilangan real $x < 0$ sedemikian sehingga $y = 2x/(1+x)$.
3. Buktikan bahwa $f(x) = x^2/(x^2+1)$ merupakan fungsi terbatas (pada $\mathbf{R}$).