MA2111 PENGANTAR MATEMATIKA
Semester I, Tahun 2015/2016

Hendra Gunawan

9-10

METODE KONTRADIKSI & METODE KONTRAPOSISI

Metode Pembuktian Lainnya

Pada bab-bab sebelumnya kita telah mem-bahas beberapa metode pembuktian untuk implikasi dan pernyataan berkuantor, mulai dari metode maju-mundur, metode konstruksi, metode memilih, induksi, dan spesialisasi.

Apakah ini cukup? Belum!

Pada bab ini, kita akan membahas dua metode lagi, yaitu **metode kontradiksi** dan **metode kontraposisi**.

Contoh

Misal n bilangan bulat. Buktikan jika n^2 genap, maka n genap.

Apa yang harus kita lakukan? Untuk membuktikan n genap, kita harus menemukan bilangan bulat k sedemikian sehingga n = 2k.

Apa yang kita punyai? n^2 genap, yakni $n^2 = 2m$ untuk suatu bilangan bulat m. Bila kita ambil akarnya, kita dapatkan n = $\sqrt{2m}$. *Oops*! Buntu!

Metode Kontradiksi

Dalam membuktikan "jika P, maka Q", kita mulai dengan memisalkan P benar, dan kemudian mencoba mendapatkan bahwa Q haruslah benar.

Dalam upaya itu, kita bertanya: Mengapa Q tidak mungkin salah? Bila Q harus benar, tentu-nya ada *alasan* mengapa Q tidak boleh salah.

Tujuan **metode kontradiksi** adalah menemukan alasan tersebut.

Dengan metode kontradiksi, kita andaikan P benar dan Q salah, kemudian mencari tahu *keganjilan* atau *masalah* yang akan muncul.

Keganjilan atau masalah itu pada umumnya akan berupa suatu **kontradiksi**, sesuatu yang mustahil, seperti 1 = 0 atau diperolehnya bilangan n yang genap dan ganjil sekaligus.

Bila kita telah mendapatkan kontradiksi, maka kita kemudian menyimpulkan bahwa jika P benar, mestilah Q juga benar.

Catatan

"P benar dan Q salah" atau "P dan tidak Q" merupakan negasi dari "Jika P, maka Q."

Jadi, mengandaikan "P dan tidak Q" sama dengan mengandaikan bahwa implikasi "Jika P, maka Q" bernilai salah.

Ketika kita peroleh kontradiksi, kita simpulkan bahwa "Jika P, maka Q" mestilah benar.

Contoh 1

Misal n bilangan bulat. Buktikan jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti. Andaikan n^2 genap dan n ganjil. Maka, $n = 2k+1$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2m + 1$, dengan $m = 2k^2 + 2k$.

Jadi, n^2 genap dan juga ganjil sekaligus, sesuatu yang mustahil. Karena itu tidak mungkin n^2 genap dan n ganjil. Jika n^2 genap, n mestilah genap juga. [QED]

Contoh 2

Misal r adalah bilangan real. Buktikan jika $r^2 = 2$, maka r adalah bilangan irasional.

Bukti. Andaikan $r^2 = 2$ dan r adalah bilangan rasional. Maka …

…

… (silakan lengkapi buktinya.)

…

Kontradiksi. Jadi jika $r^2 = 2$, maka r mestilah merupakan bilangan irasional. [QED]

Metode Kontraposisi

Untuk membuktikan "jika P, maka Q", masih ada satu metode lagi yang dapat kita gunakan, yaitu **metode kontraposisi**.

Ingat bahwa "jika P, maka Q" setara dengan **kon-traposisi**-nya, yaitu "jika tidak Q, maka tidak P."

Jadi, untuk membuktikannya, kita dapat memisalkan bahwa Q salah, dan kemudian ber-upaya mendapatkan bahwa P juga salah.

Contoh 1

Misal n bilangan bulat. Buktikan jika n^2 genap, maka n genap.

Catatan: Di sini P: "n^2 genap" dan Q: "n genap".

Bukti. Misal n ganjil. Maka, $n = 2k+1$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2m + 1$, dengan $m = 2k^2 + 2k$, yang berarti bahwa n^2 ganjil. Jadi, jika n^2 genap, maka n mestilah genap juga. [QED]

Contoh 2

Buktikan bahwa fungsi $f(x) = x^3$ merupakan fungsi ***1-1***, yakni: jika $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$.

<u>Bukti</u>. Misal $f(x_1) = f(x_2)$, yakni $x_1^3 = x_2^3$ atau $x_1^3 - x_2^3 = 0$. Tetapi

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2),$$

dan $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ merupakan bentuk yang definit positif, kecuali $x_1 = x_2 = 0$. Akibatnya mestilah $x_1 - x_2 = 0$, atau $x_1 = x_2$. [QED]

SOAL

1. Misal n adalah bilangan bulat. Buktikan jika n^2 ganjil, maka n juga ganjil.
2. Buktikan jika *c* adalah bilangan bulat ganjil, maka persamaan $n^2 + n - c = 0$ tidak akan mempunyai solusi bilangan bulat.
3. Buktikan bahwa tidak ada bilangan asli n yang memenuhi persamaan $(n-1)^3 + n^3 = (n+1)^3$ (tanpa menggunakan Teorema Terakhir Fermat).

SOAL

4. Buktikan bahwa tidak ada tali busur lingkaran yang lebih panjang daripada diameternya.
5. Buktikan jika p dan q adalah bilangan real positif sedemikian sehingga $\sqrt{pq} \neq (p+q)/2$, maka $p \neq q$.
6. Buktikan jika n adalah bilangan asli lebih besar daripada 2, maka tidak ada bilangan asli m dengan $n + m = nm$ sedemikian sehingga n membagi m.