

MA2111 PENGANTAR MATEMATIKA
Semester I, Tahun 2015/2016

Hendra Gunawan

2

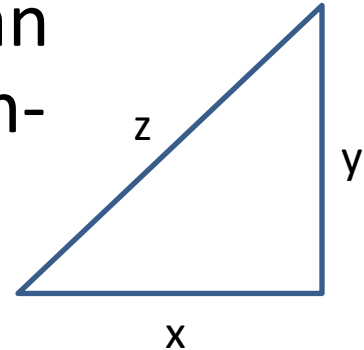
METODE MAJU-MUNDUR

Pembuktian Implikasi

Untuk membuktikan implikasi “jika P , maka Q ” **secara langsung**, kita mengasumsikan bahwa P (hipotesis) benar dan kemudian kita coba membuktikan bahwa Q (kesimpulan) benar.

Contoh 1

Proposisi.* Jika segitiga siku-siku XYZ dengan sisi-sisi tegak x dan y serta sisi miring z mempunyai luas $z^2/4$, maka segitiga XYZ merupakan segitiga sama kaki.



Analisis pra-pembuktian: Dalam proposisi ini,
P : segitiga siku-siku XYZ mempunyai luas $z^2/4$.
Q : segitiga XYZ sama kaki.

*Catatan: Proposisi adalah pernyataan yang dapat dibuktikan kebenarannya.

Analisis Pra-Pembuktian (lanjutan)

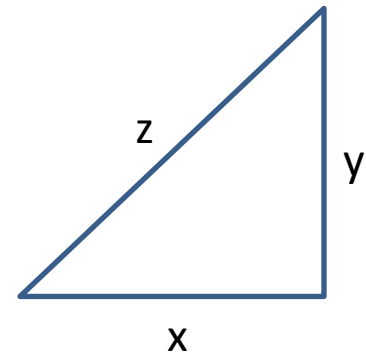
Dalam rangka membuktikan Q benar (setelah mengasumsikan bahwa P benar), kita bisa melakukan **proses maju** dari P atau **proses mundur** dari Q.

Q : segitiga XYZ sama kaki
setara dengan

$$Q1 : x = y$$

atau

$$Q2 : x - y = 0$$



Analisis Pra-Pembuktian (lanjutan)

Bagaimana mendapatkan Q1 atau Q2 dari P?

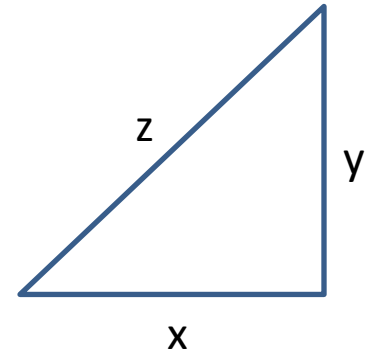
$$P : L = z^2/4$$

$$P1 : xy/2 = z^2/4.$$

$$P2 : xy/2 = (x^2 + y^2)/4 \quad [\text{Dalil Pythagoras: } x^2 + y^2 = z^2.]$$

$$P3 : x^2 + y^2 - 2xy = 0.$$

$$P4 : (x - y)^2 = 0.$$



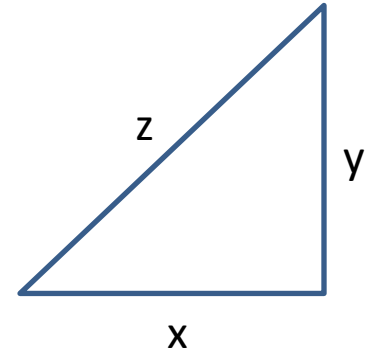
Analisis Pra-Pembuktian (lanjutan)

Sekarang terlihat bahwa

$$P4 : (x - y)^2 = 0$$

akan memberikan

$$Q2 : x - y = 0.$$



Jadi kita telah menemukan “jalan” dari P ke Q:

$$P \rightarrow P1 \rightarrow P2 \rightarrow P3 \rightarrow P4 \rightarrow Q2 \rightarrow Q1 \rightarrow Q,$$

dengan bantuan Dalil Pythagoras dari P1 ke P2.

Bukti Proposisi

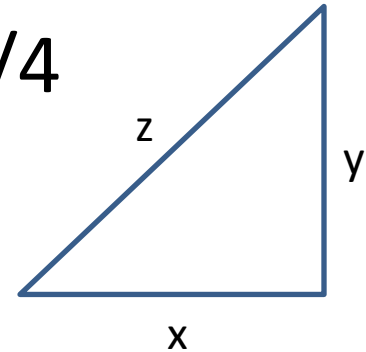
Untuk membuktikan bahwa segitiga XYZ sama kaki, kita cukup membuktikan bahwa $x = y$.

Dari hipotesis, kita mempunyai $xy/2 = z^2/4$ atau $2xy = z^2$.

Menurut Dalil Pythagoras, $z^2 = x^2 + y^2$.

Jadi, $2xy = x^2 + y^2$ atau $x^2 + y^2 - 2xy = 0$ atau $(x - y)^2 = 0$. Akibatnya $x - y = 0$ atau $x = y$.

[QED]



LATIHAN

Buktikan “jika n adalah bilangan ganjil, maka $n^2 - 1$ habis dibagi 8.”

Bukti: Misalkan n ganjil, atau $n = 2m+1$ untuk suatu bilangan bulat m . Maka, $n^2 = 4m^2 + 4m + 1$, sehingga $n^2 - 1 = 4m(m+1)$. Karena hasil kali dua bilangan bulat berurutan selalu genap, kita peroleh $n^2 - 1 = 4 \cdot 2k = 8k$, untuk suatu bilangan bulat k . Jadi $n^2 - 1$ mestilah habis dibagi 8. [QED]

SOAL

Buktikan pernyataan/implikasi berikut:

1. Jika segitiga XYZ siku-siku dan sama kaki, maka panjang sisi miringnya sama dengan $\sqrt{2}$ kali panjang alasnya.
2. Jika m dan n adalah dua bilangan bulat berurutan, maka $m^2 + n^2 - 1$ habis dibagi 4.
3. Jika a adalah bilangan real positif, maka $a + 1/a \geq 2$.
4. Jika a dan b adalah bilangan real tak negatif, maka $(a + b)/2 \geq (ab)^{1/2}$.