MA2111 PENGANTAR MATEMATIKA

Semester I, Tahun 2015/2016

Hendra Gunawan

3

DEFINISI DAN PERISTILAHAN MATEMATIKA

Ingat PROPOSISI Ini?

Proposisi. Jika segitiga siku-siku XYZ dengan sisi-sisi tegak x dan y serta sisi miring z mempunyai luas $z^2/4$, maka segitiga XYZ merupakan segitiga sama kaki.

Kata atau frasa dari keilmuan matematika apa saja yang tercantum dalam proposisi di atas?

Ingat PROPOSISI Ini?

Proposisi. Jika segitiga siku-siku XYZ dengan sisi-sisi tegak x dan y serta sisi miring z mempunyai luas $z^2/4$, maka segitiga XYZ merupakan segitiga sama kaki.

Selain itu, ada berapa simbol yang tercantum dalam proposisi di atas?

Ingat PROPOSISI Ini?

Proposisi. Jika segitiga siku-siku XYZ dengan sisi-sisi tegak x dan y serta sisi miring z mempunyai luas $z^2/4$, maka segitiga XYZ merupakan segitiga sama kaki.

Ingat pula bahwa dalam matematika frasa "Jika … , maka …" mempunyai arti khusus.

Ingat PROPOSISI Ini?

Proposisi. Jika segitiga siku-siku XYZ dengan sisi-sisi tegak x dan y serta sisi miring z mempunyai luas $z^2/4$, maka segitiga XYZ merupakan segitiga sama kaki.

Kata-kata yang tersisa, yaitu “dengan”, “dan”, “serta”, “mempunyai”, “merupakan”, adalah kata-kata dalam bahasa Indonesia sehari-hari.

Jadi…

Bila anda ingin menguasai matematika, pelajari bahasanya, mulai dengan memahami berbagai definisi dan peristilahan matematika yang mendasar, lalu “tata bahasa”-nya.

DEFINISI (1)

Definisi dalam matematika adalah suatu kesepakatan tentang arti dari suatu kata, frasa, atau istilah.

Sebagai contoh, kita sepakat bahwa pernyataan "Jika P, maka Q" benar *kecuali* dalam hal P benar dan Q salah.

Anda boleh tidak setuju dengan ini, tetapi anda tidak akan bisa berkomunikasi dengan mereka yang telah menyepakati makna pernyataan tsb.

DEFINISI (2)

Definisi tidak dibuat sembarangan. Ia diusulkan karena muncul berulang-kali.

Sebagai contoh, ketika kita berurusan dengan bilangan bulat, ada bilangan yang habis dibagi dua dan yang tidak habis dibagi dua. Supaya tidak menulis frasa “bilangan yang habis dibagi dua” dan “bilangan yang tidak habis dibagi dua” berulang-kali, kita definisikan “bilangan genap” dan “bilangan ganjil”.

Contoh DEFINISI (1)

1. Bilangan 0, ±1, ±2, ±3, dan seterusnya disebut **bilangan bulat**.
2. Bilangan bulat n dikatakan **membagi** m, ditulis **n|m**, apabila m = kn untuk suatu bilangan bulat k.
3. Bilangan bulat positif p > 1 disebut **bilangan prima** apabila bilangan bulat positif yang membagi p hanya 1 dan p.
4. Bilangan bulat n disebut **bilangan genap** apabila 2 membagi n.

Contoh DEFINISI (2)

5. Bilangan bulat n disebut **bilangan ganjil** apa-bila $n = 2k+1$ untuk suatu bilangan bulat k.
6. Bilangan yang dapat dituliskan sebagai rasio dua bilangan bulat p dan q dengan $q \neq 0$ disebut **bilangan rasional**.
7. Bilangan yang tak dapat dituliskan sebagai rasio dua bilangan bulat p dan q dengan $q \neq 0$, seperti halnya $\sqrt{2}$, disebut **bilangan irasional**.

Contoh DEFINISI (3)

8. Dua pasang bilangan real (a,b) dan (c,d) dikatakan **sama** apabila a = c dan b = d.
9. Dua pernyataan P dan Q dikatakan **setara** atau **ekuivalen** apabila "jika P, maka Q" *dan* "jika Q, maka P".
10. Pernyataan "P **dan** Q" benar jika dan hanya jika P benar dan Q juga benar.
11. Pernyataan "P **atau** Q" benar kecuali dalam hal P salah dan Q juga salah.

Catatan

Perhatikan bahwa kata/frasa "apabila" dan "jika dan hanya jika" digunakan dalam perumusan definisi. Keduanya mempunyai makna yang sama, definisi selalu berlaku *dua arah* (yakni, *jika dan hanya jika*, sekalipun kita menggunakan kata "apabila" yang setara dengan "jika".

Ingat SOAL Ini?

Buktikan "jika n adalah bilangan ganjil, maka $n^2 - 1$ habis dibagi 8."

Ada *dua* definisi terlibat dalam soal ini.

Yang pertama adalah definisi **bilangan ganjil**.

Yang kedua definisi bilangan "**habis dibagi**" oleh bilangan lain.

Frasa "$n^2 - 1$ habis dibagi 8" dalam hal ini sama artinya dengan 8 membagi $n^2 - 1$.

Ingat Jawaban Ini?

1) Jika n adalah bilangan ganjil, maka n^2-1 habis dibagi 8

P = n bilangan ganjil

Q = n^2-1 habis dibagi 8.

untuk membuktikan n^2-1 habis dibagi 8, kita cukup membuktikan bahwa $n^2-1 =$ [illegible]. genap.

Dari hipotesis kita punya $\frac{n+1}{2} = a$; dengan a bilangan bulat.

atau $n+1 = 2a$.

$(n^2-1) = 8a$

$(n+1)(n-1) = 8a$

$(n-1) = 4$ ← terbukti

↓ ganjil

Ingat Jawaban Ini?

① Buktikan "Jika n adalah bilangan ganjil, maka n^2-1 habis dibagi 8"

Bukti Proposisi

Untuk membuktikan bahwa n^2-1 habis dibagi 8, kita cukup membuktikan $n^2-1 \geq 8$

Dari hipotesis, kita mempunyai n adalah bilangan ganjil atau $n = \ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots$

Jadi, dibutuhkan n agar habis dibagi 8 $\{n \mid n \leq -3 \text{ atau } n \geq 3\}$ akibatnya nilai n tidak memenuhi

Contoh Jawaban yang Diharapkan

Buktikan "jika n adalah bilangan ganjil, maka $n^2 - 1$ habis dibagi 8."

Bukti: Misalkan n **ganjil**, yakni $n = 2m+1$ untuk suatu bilangan bulat m. Maka, $n^2 = 4m^2 + 4m + 1$, sehingga $n^2 - 1 = 4m(m+1)$. Karena hasil kali dua bilangan bulat berurutan selalu genap, kita peroleh $n^2 - 1 = 4 \cdot 2k = 8k$, untuk suatu bilangan bulat k. Jadi $n^2 - 1$ mestilah **habis dibagi** 8. [QED]

PERISTILAHAN

Dalam matematika, ada empat istilah yang sering anda jumpai, yaitu: **proposisi**, **teorema***, **lemma**, dan **akibat**. Keempatnya merujuk ke satu hal yang sama, yaitu pernyataan yang benar dan kebenaran-nya biasanya dikukuhkan dengan pembuktian.

Beberapa proposisi dianggap sangat penting sehingga disebut teorema. Proposisi pendukung dinyatakan sebagai lemma. Proposisi yang diperoleh dari proposisi lain disebut sebagai akibat.

*selain teorema, istilah dalil, hukum, aturan, sifat, atau prinsip kadang dipakai juga.

Aksioma dan Postulat

Selain proposisi, teorema, lemma, dan akibat, ada **aksioma** dan **postulat**, yaitu pernyataan yang kebenarannya diterima tanpa pembuktian.

Contoh aksioma adalah: jika n adalah bilangan asli, maka n + 1 juga bilangan asli.

Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Kita telah membahas pernyataan implikasi "Jika P, maka Q." Pernyataan ini kadang dituliskan pula sebagai "P hanya jika Q" atau "Q jika P".

Terdapat tiga pernyataan yang terkait dengan "jika P, maka Q", yaitu:

1. **Konvers**: "Jika Q, maka P."
2. **Invers**: "Jika tidak P, maka tidak Q."
3. **Kontraposisi**: "Jika tidak Q, maka tidak P."

Tabel Kebenaran

P	Q	Tidak P	Tidak Q	P → Q	Tidak Q → Tidak P
B	B	S	S	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	B	B

SOAL

1. Dalam pernyataan berikut, kata/frasa dan simbol manakah yang merupakan definisi?
    a. Jika S adalah himpunan bagian dari T, maka T^c merupakan himpunan bagian dari S^c.
    b. Jika S dan T adalah himpunan konveks, maka $S \cap T$ juga merupakan himpunan konveks.
2. Buktikan jika n adalah bilangan ganjil, maka n^2 juga merupakan bilangan ganjil.
3. Buktikan jika m dan n adalah bilangan ganjil, maka mn merupakan bilangan ganjil.
4. Tuliskan konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan berikut:
    a. Jika r adalah bilangan rasional, maka $r^2 \neq 2$.
    b. Jika n^2 adalah bilangan genap, maka n genap.