MA2111 PENGANTAR MATEMATIKA

Semester I, Tahun 2015/2016

Hendra Gunawan

5

KUANTOR II: METODE MEMILIH

Masih Berurusan dengan Kuantor

Sekarang kita akan membahas **metode memilih**, suatu metode pembuktian yang berkenaan dgn pernyataan yang mengandung kuantor universal "**untuk setiap**" (dalam **proses mundur**).

Pernyataan "untuk setiap..." sering kita jumpai ketika kita berurusan dengan himpunan.

Himpunan yang sering kita bahas dalam kuliah ini adalah himpunan bilangan asli **N**, himpunan bilangan bulat **Z**, himpunan bilangan rasional **Q**, dan himpunan bilangan real **R**.

Cara Menyatakan Himpunan

Setidaknya ada 3 (tiga) cara menyatakan himpunan, yaitu:

1. Dengan mendaftarkan anggotanya; misal $A := \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$.
2. Dengan menyatakan sifat keanggotaannya; misal $B := \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$.
3. Dengan menjelaskan himpunan tersebut secara verbal; misal B adalah himpunan semua bilangan real positif.

Sebuah himpunan kadang dapat dinyatakan dalam satu atau lebih cara di atas.

Himpunan Bagian dan Kesamaan Dua Himpunan (1)

Definisi: Himpunan A disebut **himpunan bagian** dari himpunan B, ditulis $A \subseteq B$, apabila *setiap* anggota A juga merupakan anggota B.

Definisi: Dua himpunan A dan B dikatakan **sama** apabila $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Diberikan dua himpunan A dan B, bagaimana kita membuktikan bahwa: (i) $A \subseteq B$? (ii) $A = B$?

Himpunan Bagian dan Kesamaan Dua Himpunan (2)

(i) Untuk membuktikan bahwa $A \subseteq B$, kita harus membuktikan bahwa setiap anggota A merupakan anggota B.

(ii) Untuk membuktikan bahwa $A = B$, kita harus membuktikan bahwa (a) setiap anggota A merupakan anggota B dan (b) setiap anggota B merupakan anggota A.

Tetapi, bagaimana persisnya?

Mengenali Pernyataan yang Mengandung Kuantor Universal (1)

Secara umum, pernyataan berkuantor universal mempunyai struktur: "untuk *setiap* objek dengan sifat tertentu, sesuatu berlaku" (atau: "setiap objek dengan sifat tertentu memenuhi sesuatu").

Contoh 1: Untuk setiap sudut t, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Objek : sudut t.

Sifat tertentu : tidak ada.

Sesuatu berlaku : $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Mengenali Pernyataan yang Mengandung Kuantor Universal (2)

Contoh 2: Untuk setiap bilangan $y > 0$, terdapat bilangan real x sedemikian sehingga $2^x = y$.

Objek : bilangan (real) y.

Sifat tertentu : $y > 0$.

Sesuatu berlaku : terdapat bilangan real x sedemikian sehingga $2^x = y$.

Catatan. Sebagian matematikawan kadang menggunakan lambang $\forall$ (baca: untuk setiap), $\exists$ (baca: terdapat), dan $\ni$ (baca: sedemikian sehingga). Sebagai contoh: $\forall\, y > 0\ \exists\, x \in \mathbf{R} \ni 2^x = y$.

Mengenali Pernyataan yang Mengandung Kuantor Universal (3)

Contoh 3: Untuk setiap bilangan $a > 0$, $a + 1/a \geq 2$.

Objek : bilangan (real) a.

Sifat tertentu : $a > 0$.

Sesuatu berlaku : $a + 1/a \geq 2$.

Catatan. Pernyataan di atas setara dengan "Setiap bilangan $a > 0$ memenuhi $a + 1/a \geq 2$." [Jika A adalah himpunan semua bilangan positif dan B adalah himpunan bilangan a yg memenuhi $a + 1/a \geq 2$, maka pernyataan di atas setara dgn $A \subseteq B$.]

Metode Memilih (1)

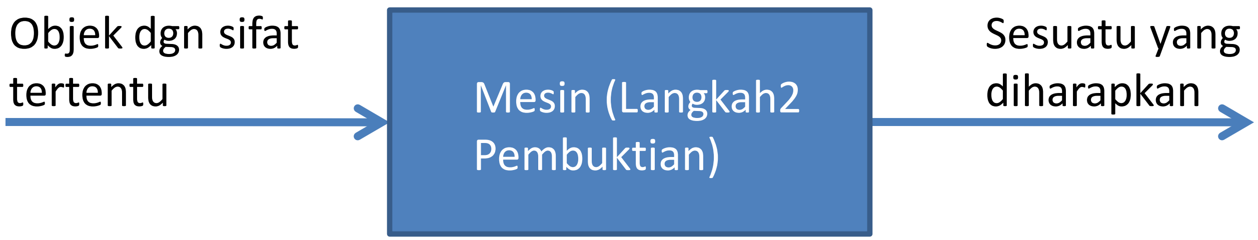
Ketika kita hendak membuktikan suatu implikasi, kita mungkin berhadapan dengan pernyataan yang mengandung kuantor universal: "untuk setiap … dengan sifat …, ………. berlaku."

Untuk membuktikannya, kita mesti mengetahui terlebih dahulu objek yang dimaksud; kemudian membuktikan "sesuatu" tsb berlaku.

Bila objek tsb *terhingga* banyaknya, katakan ada 7 buah, maka kita dapat memeriksanya satu per satu. Namun, seringkali, objek tsb *tak terhingga* banyak-nya. Dalam hal ini, kita gunakan metode memilih.

Metode Memilih (2)

Prinsip **metode memilih** mirip dengan cara kerja sebuah mesin "input-output": apapun yang masuk ke dalam mesin ini akan diolah oleh mesin, sehingga dihasilkan sesuatu yang diharapkan.



Mirip dgn 'fungsi', misal $f(x) = x^2$. Berapapun x, f akan menghasilkan x^2.

Contoh 1

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n > 1$ berlaku $n^2 > n$.

Bukti. *Ambil* $n > 1$ *sembarang**. Kalikan kedua ruas dengan n. Maka, kita peroleh $n^2 > n$. [QED]

*Kita lebih sering menggunakan kata “ambil” daripada “pilih”, dan menambahkan kata “sembarang”, untuk menekankan bahwa objek yang sedang kita bahas bukan sebuah bilangan (misal $n = 7$) tetapi bilangan $n > 1$ sembarang.

Contoh 2

Buktikan bahwa setiap bilangan real x dengan $1 \leq x \leq 2$ memenuhi $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

Buktikan juga sebaliknya bahwa setiap bilangan real x yang memenuhi $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ mestilah memenuhi $1 \leq x \leq 2$.

SOAL

1. Ubahlah pernyataan berikut menjadi pernyataan yang mengandung kuantor universal:
   a. Jika x dan y adalah bilangan real dengan $x < y$, maka terdapat bilangan rasional r sedemikian sehingga $x < r < y$.
   b. Bilangan kuadrat selalu lebih besar dari atau sama dengan nol.
2. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real x dengan $0 < x < 1$ berlaku $x^2 < x$.