MA2111 PENGANTAR MATEMATIKA

Semester I, Tahun 2015/2016

Hendra Gunawan

6

KUANTOR III: INDUKSI

Pernyataan Berkuantor Universal (1)

Pada bab sebelumnya kita telah membahas metode memilih untuk membuktikan pernyataan berkuantor universal.

Pada kesempatan ini, kita akan membahas suatu metode lain, yakni **metode induksi**, untuk membuktikan pernyataan berkuantor universal yang berkenaan dgn bilangan asli.

Pernyataan Berkuantor Universal (2)

Misalkan P(n) adalah pernyataan yang berkenaan dengan bilangan asli n (misalnya: "$n^2 \geq n$"), dan kita ingin membuktikan pernyataan:

"Untuk setiap $n \geq 1$, P(n) berlaku."

Apa yang harus kita lakukan adalah memeriksa kebenaran P(1), P(2), P(3), dan seterusnya. Dengan metode memilih, kita ambil n sembarang, lalu buktikan bahwa P(n) benar. Dengan metode induksi, kita lakukan dua hal, yaitu:

Metode Induksi (1)

Pertama, kita buktikan bahwa P(1) benar. [Langkah ini dikenal sebagai "***basis step***".]

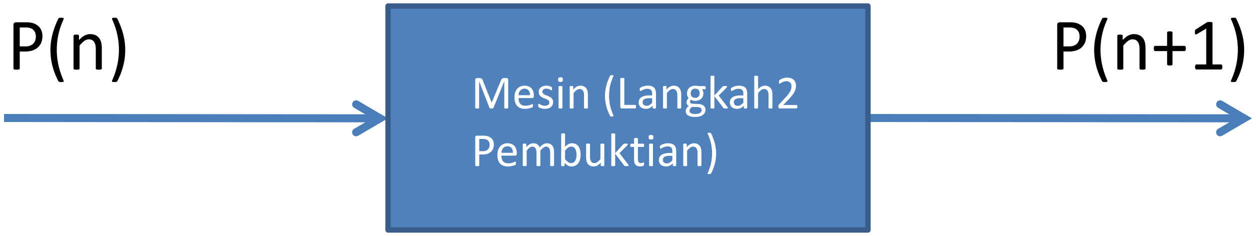
Selanjutnya, kita buktikan implikasi "jika P(n) benar, maka P(n+1) benar", untuk setiap bilangan asli n. [Langkah ini: "***induction step***".]

Bila kita berhasil melakukan kedua hal tsb, kita dapat menyimpulkan bahwa P(n) benar untuk setiap bilangan asli n.

Berikut adalah penjelasan mengapa kita dapat mengambil kesimpulan tsb.

Metode Induksi (2)

Implikasi "jika P(n) benar, maka P(n+1) benar" ibarat mesin "input-output":



Jadi, setelah kita buktikan P(1) benar, kita input P(1) ke dalam mesin ini, sehingga kita peroleh P(2) benar. Lalu, kita input P(2) ke dalam mesin ini, sehingga kita peroleh P(3) benar, dst. *Secara induktif*, P(n) benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 1

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $2^n > n$.

Perhatikan bahwa ketaksamaan berlaku untuk beberapa bilangan asli pertama: $2^1 > 1$, $2^2 > 2$, $2^3 > 3$. Jadi *tampaknya* ketaksamaan berlaku untuk setiap bilangan asli.

Bukti. Ketaksamaan berlaku untuk $n = 1$: $2^1 > 1$. Selanjutnya, akan kita buktikan bahwa, untuk setiap bilangan asli n, implikasi "jika $2^n > n$, maka $2^{n+1} > n + 1$" berlaku.

Untuk itu, ambil n sembarang dan misalkan bahwa $2^n > n$. Maka,

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n.$$

Tetapi $2n = n + n \geq n + 1$. Jadi kita peroleh

$$2^{n+1} > n + 1.$$

Dengan demikian untuk setiap n implikasi "jika $2^n > n$, maka $2^{n+1} > n + 1$" berlaku.

Secara induktif, kita simpulkan bahwa $2^n > n$ untuk setiap bilangan asli n. [QED]

Contoh 2

Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ untuk setiap bilangan asli n.

Metode Induksi yang Diperumum

Secara umum, metode induksi dapat pula dipakai untuk membuktikan pernyataan

"untuk setiap $n \geq n_0$, P(n) berlaku."

Di sini n_0 merupakan suatu bilangan asli yang tidak harus sama dengan 1.

Caranya mirip. Pertama kita buktikan bahwa $P(n_0)$ benar. Selanjutnya, untuk $n \geq n_0$, buktikan implikasi "jika P(n) benar, maka P(n+1) benar".

Contoh 3

Buktikan bahwa $2^n > n^2$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 5$.

Metode Induksi Kuat (1)

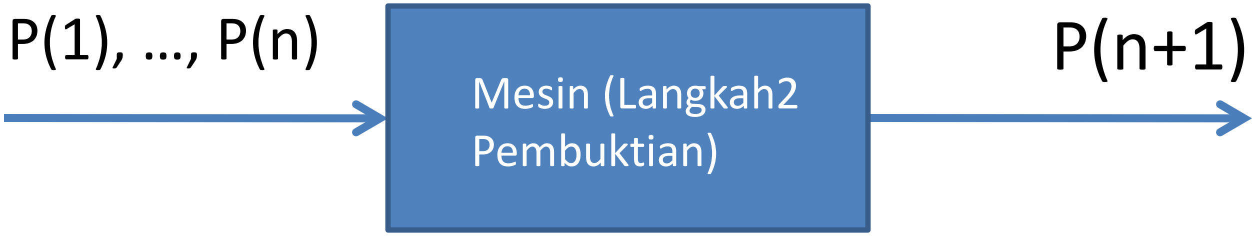
Ada kalanya, setelah membuktikan bahwa $P(n_0)$ benar, kita kesulitan membuktikan implikasi "jika P(n) benar, maka P(n+1) benar".

Namun, dengan memisalkan bahwa P(1), … , P(n) benar, kita ternyata dapat membuktikan bahwa P(n+1) benar.

Secara induktif, kita dapat menyimpulkan bahwa P(n) benar untuk setiap $n \geq n_0$.

Metode Induksi Kuat (2)

Untuk $n_0 = 1$, mesin Induksi Kuat bekerja sbb:



Jadi, setelah P(1) benar, maka P(2) benar. Selanjutnya, setelah P(1) dan P(2) benar, maka P(3) benar, dan seterusnya.

Contoh 4

Buktikan bahwa setiap bilangan asli $n \geq 2$ dapat dituliskan sebagai hasil kali sejumlah terhingga bilangan prima.

SOAL

1. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n, $n^3 - n$ habis dibagi 6.
2. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n, himpunan dengan n anggota mempunyai tepat 2^n himpunan bagian.
3. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$ berlaku $n! \geq n^2$.
4. Diketahui $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, dan

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} \text{ untuk } n \geq 4.$$

   Buktikan bahwa $x_n < 2^n$ untuk setiap $n \geq 4$.