MA2111 PENGANTAR MATEMATIKA

Semester I, Tahun 2015/2016

Hendra Gunawan

7

KUANTOR IV: SPESIALISASI

Hipotesis Berkuantor

Sekarang kita akan membahas bagaimana membuktikan impikasi "Jika P, maka Q", apabila P mengandung kuantor.

Jika P mengandung kuantor eksistensial, "terdapat ...O... dengan sifat ... sehingga ...", maka kita dapat menggunakan hipotesis tersebut secara langsung, dengan menerapkan metode memilih. "Misal O ..."

Contoh

Buktikan jika $p(x) = x^2 – bx + 1$ mempunyai akar positif, maka $b \geq 2$.

P: Terdapat $c > 0$ sedemikian shg $c^2 – bc + 1 = 0$.

Q: $b \geq 2$.

Bukti. Misal $c > 0$ sedemikian shg $c^2 – bc + 1 = 0$. Maka $b = (c^2 + 1)/c = c + 1/c \geq 2$ (sebagaimana pernah kita buktikan pada Bab 3). [QED]

Hipotesis Berkuantor Universal

Yang lebih menarik adalah apabila P mengandung kuantor universal, "untuk setiap … dengan sifat … berlaku …".

Untuk memanfaatkan informasi pada hipotesis tersebut, kita gunakan **metode spesialisasi**.

Kita mengasumsikan bahwa setiap objek O dengan sifat S memenuhi X. Bila kita kemudian *menjumpai* suatu objek O dengan sifat S, maka X mesti terjadi.

Selanjutnya kita tinggal memanfaatkan informasi ini untuk sampai pada kesimpulan yang diinginkan (Q).

Contoh

Buktikan jika $T \subseteq S \subseteq \mathbf{R}$ dan b adalah batas atas untuk S, maka b juga merupakan batas atas untuk T.

Def. Bilangan real b disebut **batas atas** untuk himpunan $S \subseteq \mathbf{R}$ apabila untuk setiap $x \in S$ berlaku $x \leq b$.

P : $T \subseteq S$ dan b adalah batas atas untuk S.

Q : b adalah batas atas untuk T.

Perhatikan bahwa hipotesis P berbunyi: $T \subseteq S$ dan b adalah batas atas untuk S.

Apakah P mengandung kuantor? Ya, kuantor universal, dalam dua pernyataan.

- $T \subseteq S$ berarti setiap anggota T juga merupakan anggota S.
- b adalah batas atas untuk S berarti untuk setiap $x \in S$ berlaku $x \le b$.

Analisis Pra-Pembuktian

Setelah mengetahui bahwa P mengandung kuantor universal, silakan "bekerja di dapur" terlebih dahulu, gunakan metode maju-mundur dan lakukan analisis pendahuluan, sebelum anda membuktikan pernyataan yg diminta:

Buktikan jika $T \subseteq S \subseteq \mathbf{R}$ dan b adalah batas atas untuk S, maka b juga merupakan batas atas untuk T.

Bukti. Misalkan $T \subseteq S$ dan b adalah batas atas untuk S. Akan dibuktikan b merupakan batas atas untuk T. Untuk itu, kita harus membuktikan bahwa untuk setiap $x \in T$ berlaku $x \leq b$.

Ambil $x \in T$ sembarang. [Ini metode memilih.]

Karena $T \subseteq S$, maka $x \in S$. [Di sini kita telah menerapkan metode spesialisasi! Setiap anggota T merupakan anggota S; $x \in T$, jadi mestilah $x \in S$.]

Karena b adalah batas atas untuk S, maka $x \leq b$. [Metode spesialisasi juga diterapkan di sini!]

Jadi, untuk setiap $x \in T$ berlaku $x \leq b$; yang berarti b merupakan batas atas untuk T. [QED]

SOAL

1. Buktikan jika $R \subseteq S$ dan $S \subseteq T$, maka $R \subseteq T$.
2. Buktikan jika f dan g adalah fungsi konveks pada interval yang sama, maka f + g juga merupakan fungsi konveks pada interval tsb.

   [Def. Fungsi f **konveks** pada interval I apabila untuk setiap $x, y \in I$ dan untuk setiap $t \in [0,1]$ berlaku $f\big(tx+(1-t)y\big) \le t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y)$.]