11. EKSISTENSI BILANGAN IRASIONAL

Alih-alih mengukuhkan fatwa Sang Guru bahwa semua dapat dinyatakan sebagai bilangan (rasional), salah seorang murid Pythagoras justru menemukan contoh penyangkalnya dari segitiga siku-siku yang telah dikenal dengan baik oleh Sang Guru. Persisnya, murid tersebut berhasil membuktikan bahwa panjang sisi miring segitiga siku-siku yang mempunyai alas dan tinggi sama dengan 1 tidak dapat dinyatakan sebagai rasio dua bilangan bulat, dan karena itu ia bukan merupakan bilangan rasional.

Buktinya adalah sebagai berikut. Misal panjang sisi miring segitiga siku-siku tersebut sama dengan r. Menurut dalil Pythagoras, $r^2 = 2$. Andaikan r yang memenuhi persamaan ini merupakan bilangan rasional, katakanlah $r = p/q$ dengan p dan q tidak mempunyai faktor sekutu selain 1. Dari pengandaian ini, kita peroleh $p^2 = 2q^2$, sehingga p^2 merupakan bilangan genap, dan karenanya p juga genap. Tulis $p = 2n$. Maka $4n^2 = 2q^2$, sehingga $q^2 = 2n^2$ genap, dan akibatnya q juga genap. Ini bertentangan dengan asumsi awal bahwa p dan q tidak mempunyai faktor sekutu selain 1. Jadi pengandaian tadi mestilah salah, yakni tidak mungkin ada bilangan rasional r yang memenuhi $r^2 = 2$.

Dengan menggunakan lambang yang kita kenal sekarang, panjang sisi miring segitiga siku-siku tersebut sama dengan $\sqrt{2}$. Bilangan ini termasuk bilangan *irasional*. Penasaran dengan bilangan $\sqrt{2}$, seorang penerus Pythagoras yang bernama Archytas (428–347 SM) menyatakan $\sqrt{2}$ dalam bentuk *pecahan berlanjut*. Secara umum, mulai dengan bilangan x_1 (sembarang), ia menghitung secara iteratif

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - [x_1]},\ x_3 = \frac{1}{x_2 - [x_2]}, \ldots$$

dengan $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil daripada atau sama dengan x. Kecuali dalam hal x_1 rasional, iterasi di atas akan **terus** berlanjut dan x_1 akan menjadi pecahan berlanjut

$$x_1 = [x_1] + \frac{1}{[x_2] + \frac{1}{[x_3] + \cdots}}.$$

Jika $x_1 = \sqrt{2}$, maka $[x_1] = 1$, sehingga $x_1 - [x_1] = \sqrt{2} - 1$ dan $x_2 = \sqrt{2} + 1$. Selanjutnya $[x_2] = 2$, sehingga $x_2 - [x_2] = \sqrt{2} - 1$ dan $x_3 = \sqrt{2} + 1$. Secara induktif, $[x_i] = 2$ untuk $i = 2, 3, 4, \ldots$. Jadi, dalam hal ini $\sqrt{2}$ merupakan pecahan berlanjut

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}.$$

Bila iterasi dihentikan pada langkah ke-n, maka kita peroleh suatu pecahan *hampiran* untuk $\sqrt{2}$. Semakin besar n, semakin baik hampirannya. Jadi, walau fatwa "semua adalah bilangan" itu salah, Archytas telah menemukan fakta penting bahwa "semua dapat dihampiri oleh bilangan (rasional)." ***