12. HIMPUNAN BILANGAN ALJABAR

Eksistensi bilangan irasional seperti $\sqrt{2}$ membuat matematikawan Yunani Kuno menyadari bahwa *garis bilangan* yang mereka punyai ternyata mengandung bilangan yang tak mereka kenal sebelumnya, tidak hanya satu atau dua tetapi tak terhingga banyaknya. Ya, selain $\sqrt{2}$, bilangan $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, dan seterusnya, juga merupakan bilangan irasional. Demikian juga dengan bilangan akar pangkat 3, akar pangkat 4, akar pangkat 5, dan seterusnya, yakni bilangan-bilangan yang berbentuk $m^{1/n}$, dengan m dan n bilangan asli.

Ada berapa banyak bilangan-bilangan tersebut? Seperti halnya kita dapat menomori semua bilangan rasional, kita dapat pula menomori semua bilangan akar berbentuk $m^{1/n}$, dengan m dan n bilangan asli. Jadi, himpunan semua bilangan akar ini *terbilang*. Mulai sekarang, kita akan mengatakan bahwa suatu himpunan *terbilang* apabila kardinalitasnya sama dengan kardinalitas **N.**

Apakah kemudian himpunan semua bilangan rasional dan irasional itu terbilang? Nanti dulu. Kita belum memperhitungkan semua bilangan yang mungkin, seperti $1 + \sqrt{2}$, $3\sqrt{5} - \sqrt{6}$, $4^{1/3} + 2\cdot 7^{1/4} - 1$, dan seterusnya. Bilangan-bilangan ini dikenal sebagai *bilangan aljabar*, yang secara umum merupakan akar dari suatu persamaan orde-n yang berbentuk $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, dengan koefisien a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 merupakan bilangan bulat.

Ah, tetapi, kita dapat membuktikan bahwa himpunan semua bilangan aljabar ini terbilang. Untuk menemukan skenario menomorinya, tinjau jumlah nilai mutlak dari koefisien-koefisien persamaan orde-n, yaitu $s = |a_n| + |a_{n-1}| + ... + |a_0|$. Jelas bahwa s merupakan bilangan asli. Nah, sekarang kita amati bahwa terdapat n persamaan dengan nilai $s = 1$, yaitu $x^k = 0$ (k = 1, 2, ..., n), dan semuanya memberikan akar $x = 0$. Selanjutnya, terdapat n + (n+1)n persamaan dengan $s = 2$, yaitu $2 \cdot x^k = 0$ (k = 1, 2, ..., n) dan $x^k \pm x^m = 0$ ($0 \leq m < k$; k = 1, 2, ..., n), yang memberikan akar $x = 0$, 1, atau -1. Demikian seterusnya, selalu terdapat *terhingga* banyak persamaan dengan nilai s berapapun dan terdapat *terhingga* pula akar persamaan tersebut. Jadi, untuk setiap bilangan asli n, kita dapat menomori **semua** bilangan yang merupakan akar persamaan orde-n , mulai dari akar persamaan dengan nilai $s = 1$, lalu akar persamaan dengan nilai $s = 2$, dan seterusnya. Ini berarti bahwa kita dapat mendaftarkan akar-akar persamaan orde-n sebagai berikut:

Akar-akar persamaan orde-1: $x_{11}, x_{12}, x_{13}, ...$

Akar-akar persamaan orde-2: $x_{21}, x_{22}, x_{23}, ...$

Akar-akar persamaan orde-3: $x_{31}, x_{32}, x_{33}, ...$

dan seterusnya. Sekarang anda bisa menemukan skenario menomori semua akar persamaan tersebut. (Tengok kembali bagaimana kita menomori semua bilangan rasional positif pada Bab 10.) Pertanyaannya kemudian adalah: apakah semua bilangan merupakan bilangan aljabar? ***