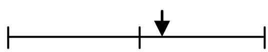
14. BILANGAN REAL DAN SISTEM BINER

Sejak di sekolah dasar kita telah berkenalan dengan garis bilangan. Pada garis tersebut, kita menandai bilangan 0, dan di sebelah kanannya bilangan-bilangan positif 1, 2, 3, dan seterusnya, sementara di sebelah kirinya bilangan-bilangan negatif -1, -2, -3, dan seterusnya. Bila diperlukan kita tandai juga bilangan-bilangan pecahan $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}$, dan seterusnya. Sekarang kita (mudah-mudahan) telah menyadari bahwa pada garis tersebut sesungguhnya terdapat tak terhingga bilangan-bilangan lainnya, yaitu bilangan-bilangan irasional, yang terdiri dari bilangan aljabar dan bilangan transenden. Semua bilangan ini disebut sebagai *bilangan real*. Setiap titik pada garis bilangan menyatakan suatu bilangan real dan, sebaliknya, setiap bilangan real menempati suatu titik tersendiri pada garis tersebut.

Nah, sekarang misalkan kita mempunyai suatu titik x di antara 0 dan 1 (inklusif, termasuk 0 atau 1). Bagaimana kita mengetahui nilai bilangan yang dinyatakan oleh titik x tersebut? Ada suatu cara yang relatif mudah, yaitu dengan membagi dua interval di mana x berada, dan mengulanginya hingga kita 'menemukan' bilangan x tersebut. Misalkan, pada langkah pertama, setelah kita membagi dua interval [0, 1], titik x berada di sebelah **kanan**, yaitu pada interval [½, 1].



Maka $x = ½ + \delta_1$, dengan δ_1 di antara 0 dan ½. Lalu kita bagi dua lagi interval [½, 1] dan misalkan x berada di sebelah **kiri** interval tersebut, yaitu pada interval [½, ¾]. Maka $x = ½ + 0 \cdot ¼ + \delta_2$, dengan δ_2 di antara 0 dan ¼. Kita bagi dua terus hingga, pada langkah ke-n, kita peroleh --- misalnya

$$x = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2^2} + 0 \cdot \frac{1}{2^3} + 1 \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots + 1 \cdot \frac{1}{2^n} + \delta_n,$$

dengan δ_n di antara 0 dan $1/2^n$. Secara umum, proses pencarian x bisa berhenti (ketika $\delta_n = 0$), tetapi bisa juga berlanjut terus. Sebagai contoh, bila $x = ⅓$, maka proses akan berlanjut terus dan hasilnya berupa *deret*:

$$\frac{1}{3} = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 0 \cdot \frac{1}{2^3} + 1 \cdot \frac{1}{2^4} + 0 \cdot \frac{1}{2^5} + 1 \cdot \frac{1}{2^6} + \cdots.$$

Demikian juga bila $x = 1$, maka kita akan memperoleh deret

$$1 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 1 \cdot \frac{1}{2^3} + 1 \cdot \frac{1}{2^4} + 1 \cdot \frac{1}{2^5} + 1 \cdot \frac{1}{2^6} + \cdots.$$

Pada setiap langkah pembagian dua interval, bilangan $x = 1$ akan selalu berada di interval sebelah **kanan**, karena itu kita peroleh deret di atas. Proses pembagian dua interval dalam hal ini terkait dengan *sistem bilangan biner*. Dalam sistem biner, kita menulis --- misalnya:

$$⅓ = [0.0101010101...]_2 \text{ dan } 1 = [0.1111111111...]_2.$$

Secara umum, bilangan real di antara 0 dan 1 dapat dituliskan sebagai $[0.b_1b_2b_3...]_2$ dengan $b_n = 0$ atau 1. ***