16. KARDINALITAS HIMPUNAN BILANGAN REAL, BAGIAN I

Di akhir Bab 13, ada pertanyaan tentang kardinalitas bilangan transenden. Sebelumnya kita sudah mengetahui bahwa himpunan semua bilangan aljabar, yang mencakup semua bilangan rasional, merupakan himpunan terbilang. *Nah*, himpunan semua bilangan real terdiri dari bilangan aljabar dan bilangan transenden. 'Menghitung' berapa banyak bilangan transenden pada akhirnya akan sama dengan menghitung berapa banyak bilangan real. Bila kita dapat membuktikan bahwa himpunan semua bilangan real itu terbilang, maka kita dapat menyimpulkan bahwa himpunan semua bilangan transenden juga terbilang. Sebaliknya, bila ternyata himpunan semua bilangan real itu **tak terbilang**, maka himpunan semua bilangan transenden mestilah juga tak terbilang.

Untuk mengetahui berapa banyak bilangan real, mari kita hitung terlebih dahulu berapa banyak bilangan real pada interval [0, 1]. Dengan menggunakan notasi bilangan desimal, setiap bilangan real x pada interval [0, 1], dapat dituliskan sebagai $x := 0.b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots$ dengan $b_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Pertanyaan kita adalah: apakah himpunan semua bilangan real pada interval [0, 1] itu terbilang?

Andaikan himpunan bilangan tersebut terbilang. Dengan perkataan lain, terdapat skenario menomori seluruh bilangan real pada interval [0, 1], sehingga kita dapat mendaftarkannya sebagai $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\}$ dengan:

$$x_1 := 0.\mathbf{b_{11}}b_{12}b_{13}b_{14}b_{15}b_{16}\ldots$$
$$x_2 := 0.b_{21}\mathbf{b_{22}}b_{23}b_{24}b_{25}b_{26}\ldots$$
$$x_3 := 0.b_{31}b_{32}\mathbf{b_{33}}b_{34}b_{35}b_{36}\ldots$$
$$x_4 := 0.b_{41}b_{42}b_{43}\mathbf{b_{44}}b_{45}b_{46}\ldots$$
$$x_5 := 0.b_{51}b_{52}b_{53}b_{54}\mathbf{b_{55}}b_{56}\ldots$$
$$\ldots$$

Sepertinya tidak ada masalah dengan daftar ini, ya? Namun, tunggu dulu. **Georg Cantor** melihat bahwa daftar ini tidak akan pernah lengkap. Dengan kejeliannya, ia mendefinisikan bilangan $y := 0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6\ldots$ dengan $c_i := 7$ bila $0 \leq \mathbf{b_{ii}} \leq 4$, dan $c_i := 2$ bila $5 \leq \mathbf{b_{ii}} \leq 9$, untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots$. Karena $c_i = 2$ atau 7, dan berbeda dengan $\mathbf{b_{ii}}$ untuk setiap i, bilangan y tidak termasuk dalam daftar di atas. Padahal, y merupakan bilangan real di antara 0 dan 1. Jadi, kita tidak mungkin mendaftarkan seluruh bilangan real pada interval [0, 1], karena bagaimanapun caranya akan selalu ada bilangan real yang terlewatkan. Dengan demikian, himpunan semua bilangan real pada interval [0, 1] tak terbilang. Akibatnya, himpunan semua bilangan real **R** juga tak terbilang. Akhirnya, kita juga dapat menyimpulkan bahwa mestilah terdapat tak terbilang banyaknya bilangan transenden pada **R**. ***