17. KARDINALITAS HIMPUNAN BILANGAN REAL, BAGIAN II

Fakta bahwa himpunan semua bilangan real $\mathbf{R}$ tak terbilang membuka cakrawala baru tentang ketakterhinggaan. Ia tidak hanya ada, tetapi juga 'bertingkat'. Frasa 'tak terhingga' dan lambang ∞ menjadi multi-arti, bergantung pada konteksnya. Himpunan semua bilangan asli $\mathbf{N}$, himpunan semua bilangan bulat $\mathbf{Z}$, dan himpunan semua bilangan rasional $\mathbf{Q}$ sama-sama mempunyai tak terhingga banyak anggota. Ketiga himpunan bilangan ini mempunyai kardinalitas yang sama. Himpunan semua bilangan real $\mathbf{R}$ juga mempunyai tak terhingga banyak anggota, tetapi kardinalitas $\mathbf{R}$ tidak sama dengan kardinalitas $\mathbf{N}$. Bila kardinalitas $\mathbf{N}$ dilambangkan dengan $\aleph_0$ (baca: alef nol), maka kardinalitas $\mathbf{R}$ dilambang-kan dengan $\mathfrak{c}$ (baca: kontinum). Ketakterbilangan $\mathbf{R}$ meng-arahkan kita pada kesimpulan bahwa $\mathfrak{c} > \aleph_0$.

Ketika kita menemukan korespondensi satu-ke-satu antara $\mathbf{Z}$ dan $\mathbf{N}$, kita seolah mendapatkan bahwa $\infty + 1 + \infty = \infty$. Terdapat tak terhingga banyak bilangan bulat negatif, satu bilangan nol, dan tak terhingga bilangan bulat positif, tetapi secara keseluruhan bilangan bulat sama banyaknya dengan bilangan asli: $\aleph_0 + 1 + \aleph_0 = \aleph_0$. Kemudian, ketika kita me-nemukan korespondensi satu-ke-satu antara $\mathbf{Q}$ dan $\mathbf{N}$, kita mendapatkan bahwa $\infty \times \infty = \infty$ atau $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. (Ingat bahwa bilangan rasional merupakan hasil bagi dua bilangan bulat m/n; terdapat tak terhingga bilangan bulat yang dapat menjadi pembilang dan tak terhingga bilangan bulat yang dapat menjadi penyebut.) Sementara itu, terkait dengan ketakterbilangan **R**, yang akan kita dapatkan adalah $2^\infty > \infty$ atau $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Dalam hal ini, kardinalitas **R** (yaitu $\mathfrak{c}$) dapat dibuktikan sama dengan kardinalitas $2^{\mathbf{N}}$ (yaitu $2^{\aleph_0}$), yang lebih besar daripada $\aleph_0$. (Oh ya, $2^{\mathbf{N}}$ adalah koleksi semua himpunan bagian dari **N**.)

Kita tahu bahwa banyaknya seluruh bilangan real sama dengan banyaknya bilangan real pada interval [0, 1]. Nah, bilangan real pada interval [0, 1] *kan* dapat dituliskan dalam bentuk biner sebagai $0.b_1b_2b_3b_4b_5...$ dengan $b_i = 0$ atau 1. Dengan fakta ini, kita dapat membuat korespondensi antara himpunan H yang merupakan himpunan bagian dari **N** dengan bilangan $x = 0.b_1b_2b_3b_4b_5...$ sebagai berikut: jika $i \in$ H, maka $b_i = 1$; jika $i \notin$ S, maka $b_i = 0$. Sebagai contoh, himpunan {1, 3, 5, ...} kita padankan dengan bilangan 0.10101..., sedangkan himpunan {2, 4, 6, ...} kita padankan dengan bilangan 0.01010... .

Apakah korespondensi tersebut merupakan korespondensi satu-ke-satu antara $2^{\mathbf{N}}$ dan interval [0, 1]? Jawabannya bukan, karena dua himpunan berbeda mungkin dipadankan dengan satu bilangan yang sama. Sebagai contoh, {1} dipadankan dengan 0.10000... dan {2, 3, 4, 5, ...} dipadankan dengan 0.01111..., padahal kita tahu bahwa 0.10000... =

0.01111... = ½. Untuk mengatasinya, baiklah kita singkirkan dahulu himpunan bagian dari **N** yang mempunyai terhingga banyak anggota. Sebagai contoh, himpunan {1}, {2, 3, 5}, dan {1, 3, 5, ... , 99} kita singkirkan. Himpunan bagian lainnya adalah himpunan-himpunan yang mempunyai tak terhingga banyak anggota, misalnya {1, 3, 5, 7, ...}, {1, 4, 9, 16, ...}, dan {2, 3, 5, 7, ...}. Korespondensi antara koleksi himpunan ini dan interval [0, 1] merupakan korespondensi satu-ke-satu. Jadi, kardinalitas koleksi himpunan tersebut sama dengan kardinalitas himpunan semua bilangan real pada interval [0, 1], yang sama dengan kardinalitas **R**, yaitu $\mathfrak{c}$.

Lalu bagaimana dengan himpunan-himpunan bagian dari **N** yang mempunyai terhingga banyak anggota, yang kita singkirkan tadi? Setiap himpunan ini berpadanan dengan bilangan $m/2^n$ (sebagai contoh, himpunan {2, 3, 5} berpadanan dengan 0.01101 = $13/2^5$). Karena himpunan semua bilangan $m/2^n$ terbilang, koleksi himpunan bagian dari **N** yang mempunyai terhingga banyak anggota juga terbilang. Penggabungan koleksi terbilang ini dengan koleksi tak terbilang sebelumnya tidak akan menambah kardinalitas. Karena itu, kardinalitas $2^{\mathbf{N}}$ tetap sama dengan kardinalitas **R**, yaitu $\mathfrak{c}$. Selanjutnya adalah soal notasi. Kita mengetahui bahwa himpunan {1, 2, 3, ..., n} mempunyai 2^n himpunan bagian. Secara umum, jika kardinalitas H sama dengan n, maka kardinalitas 2^H sama dengan 2^n. Karena kardinalitas **N** adalah $\aleph_0$, kardinalitas $2^{\mathbf{N}}$ dituliskan sebagai

$2^{\aleph_0}$. Kemudian, kita juga mengetahui bahwa, untuk setiap bilangan asli n, berlaku $2^n > n$. Sifat ini terbawa ke himpunan tak terhingga: $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Dengan demikian kita peroleh $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Apa yang telah kita bahas dalam beberapa bab terakhir dapat dirangkum sebagai berikut. Pertama, kita mempelajari himpunan semua bilangan asli **N**, yang merupakan himpunan tak terhingga. Kardinalitasnya kita lambangkan dengan $\aleph_0$. Himpunan semua bilangan bulat **Z** dan himpunan semua bilangan rasional **Q** juga mempunyai kardinalitas $\aleph_0$. Bahkan himpunan semua bilangan aljabar ternyata masih mempunyai kardinalitas $\aleph_0$. Namun, himpunan semua bilangan real **R** tidak hanya meliputi bilangan aljabar, tetapi juga mencakup bilangan transenden. Nah, fakta bahwa kita tidak dapat mendaftarkan semua bilangan real membuktikan bahwa kardinalitas **R** lebih besar daripada $\aleph_0$. Kardinalitas **R** kemudian kita lambangkan dengan $\mathfrak{c}$. Selanjutnya, kita juga meninjau $2^{\mathbf{N}}$, yakni koleksi semua himpunan bagian dari **N**. Dengan bantuan notasi bilangan biner, kita berhasil membuktikan bahwa kardinalitas $2^{\mathbf{N}}$ sama dengan kardinalitas **R**, dan akhirnya kita pun sampai pada kesimpulan bahwa $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Fakta ini mengukuhkan bahwa ketakterhinggaan itu ternyata tidak hanya ada, tetapi juga bertingkat. Selain itu, temuan ini juga memicu pertanyaan berikutnya: adakah himpunan yang memiliki kardinalitas lebih besar daripada $\mathfrak{c}$? *Hmm*... so pasti seru! ***