18. KETAKTERHINGGAAN MUTLAK

Bila kita tengok kembali himpunan semua bilangan asli **N**, himpunan ini ternyata tidak hanya mempunyai tak terhingga banyaknya anggota, tetapi juga mempunyai tak terhingga banyaknya himpunan bagian. Ketakterhinggaan yang pertama merupakan ketakterhinggaan yang terbilang, sedangkan ketakterhinggaan yang kedua merupakan ketakterhinggaan yang tak terbilang.

Ketakterbilangan $2^{\mathbf{N}}$ sesungguhnya dapat dibuktikan tanpa membonceng ketakterbilangan **R**, sebagai berikut. Andaikan $2^{\mathbf{N}}$ yang beranggotakan semua himpunan bagian dari **N** itu terbilang. Dengan perkataan lain, kita dapat mendaftarkan semua himpunan bagian dari **N**, katakanlah

$$2^{\mathbf{N}} = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, \ldots\}.$$

Nah, sekarang definisikan himpunan $H := \{i \in \mathbf{N} \mid i \notin H_i\}$. Jelas bahwa H merupakan himpunan bagian dari **N**. Namun, $H \neq H_i$ untuk $i \in \boldsymbol{N}$ manapun, karena ketika $i \notin H_i$ kita mempunyai $i \in H$ dan ketika $i \in H_i$ kita mempunyai $i \notin H$. Jadi daftar di atas tidak akan pernah lengkap, dan ini berarti $2^{\mathbf{N}}$ tak terbilang. Metode pembuktian yang sederhana tapi ampuh ini dikenal sebagai *metode diagonalisasi Cantor*.

Apa yang juga penting dicatat di sini adalah adanya *hipotesis kontinum* yang menggiring kita untuk menyimpulkan bahwa

$2^{\mathbf{N}}$, yang merupakan koleksi semua himpunan bagian dari **N** dan mempunyai kardinalitas $2^{\aleph_0}$ itu, mestilah merupakan himpunan terkecil yang berkardinalitas $\aleph_1 > \aleph_0$. Ini sama saja dengan mengatakan bahwa $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Nah, pertanyaan berikutnya adalah: apa yang kita peroleh apabila kita kumpulkan semua himpunan bagian dari **R**? Jawabannya adalah himpunan $2^{\mathbf{R}}$ yang kardinalitasnya lebih besar daripada kardinalitas **R**. Andaikan $2^{\mathbf{R}}$ dan **R** mempunyai kardinalitas yang sama, yakni terdapat korespondensi satu-ke-satu antara $2^{\mathbf{R}}$ dan **R**. Sebagai konsekuensinya, kita dapat menuliskan

$$2^{\mathbf{R}} = \{H_x \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Dengan metode diagonalisasi Cantor, kita definisikan himpunan $H := \{x \in \mathbf{R} \mid x \notin H_x\}$. Maka, H merupakan himpunan bagian dari **R**, tetapi $H \neq H_x$ untuk $x \in \boldsymbol{R}$ manapun. Ini berarti bahwa koleksi di atas tidak akan pernah lengkap.

Dari himpunan **N** yang berkardinalitas $\aleph_0$, kita peroleh himpunan $2^{\mathbf{N}}$ yang berkardinalitas $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Dari himpunan **R** yang berkardinalitas $\aleph_1$, kita peroleh himpunan $2^{\mathbf{R}}$ yang berkardinalitas $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$. Selanjutnya, anda tahu bagaimana memperoleh himpunan berkardinalitas $\aleph_3$, $\aleph_4$, dan seterusnya. Bila kita lanjutkan proses tersebut *ad infinitum*, maka kita akan memperoleh apa yang disebut oleh Cantor sebagai 'ketakterhinggaan mutlak'. *Welcome to Cantor's Heaven*!***