5. MEMAHAMI LAMPU THOMPSON

Ketika kita mempunyai dua lampu, merah dan kuning, yang menyala secara bergantian pada waktu $t = 1 - 1/2^n$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$, kita dapat menyimpulkan bahwa pada saat $t = 1$ kedua lampu tersebut menyala secara bersamaan. Namun, ketika kita hanya mempunyai satu lampu yang menyala dan mati secara bergantian pada waktu $t = 1 - 1/2^n$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$, mengapa kita tidak dapat menarik kesimpulan apa yang terjadi pada saat $t = 1$? Bila sebelumnya saya berseloroh bahwa pada saat $t = 1$ lampu tersebut mati karena keletihan, sekarang mari kita tengok lagi soal lampu ini secara serius.

Menggunakan konsep *barisan*, yang terjadi adalah sebagai berikut: ada dua barisan pasangan bilangan, yaitu barisan $(1 - 1/2^n, 1)$, $n = 0, 2, 4, ...$, dan barisan $(1 - 1/2^n, 0)$, $n = 1, 3, 5, ...$. Kedua barisan ini *konvergen*, yang satu konvergen ke (1, 1) dan yang lainnya konvergen ke (1, 0). Ketika kedua barisan ini 'digabungkan' secara berselang-seling, kita peroleh suatu barisan yang divergen (karena bilangan kedua dalam pasangan bilangan tersebut 'berosilasi', atau 1 atau 0). Ini bukan sesuatu yang mengherankan.

Walau demikian, kita sesungguhnya masih bisa melihat keterkaitan antara lampu Thompson yang menyala dan mati secara bergantian dengan sepasang lampu yang menyala secara bergantian. Persisnya begini: Bilangan $t_n = 1 - 1/2^n$

yang menyatakan waktu dan bilangan $x_n \in \{0, 1\}$ yang menyatakan keadaan lampu menyala atau mati dapat dinyatakan sebagai (*jumlah parsial* dari suatu) deret:

$$t_n = -1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k},$$

$$x_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.$$

Deret t_n konvergen ke 1, sementara deret x_n divergen --- kita sudah mengetahui kedua fakta ini. Namun, ada suatu cara lain untuk memahami deret x_n, yaitu dengan memeriksa keterjumlahannya dengan menggunakan cara yang digagas oleh **Ernesto Cesàro**. Untuk itu, kita amati jumlah parsialnya: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, ... Sekalipun x_n divergen, kita perhatikan bahwa nilai rata-rata jumlah parsialnya

$$\sigma_n := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

akan menuju ½ bila n menuju tak terhingga. Jadi, menurut Cesàro, deret x_n 'konvergen' ke ½. (Tentu saja kekonvergenan ala Cesàro tidak sama dengan kekonvergenan biasa.)

Hasil Cesàro mengisyaratkan bahwa pada saat $t = 1$ lampu tidak menyala ataupun mati, tetapi 'setengah menyala'. Dalam balapan katak (masih ingat *kan*?), itu sama saja dengan hasil *draw*. ***