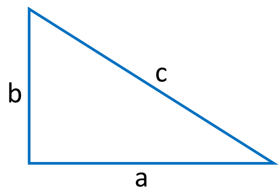
2 Pythagoras Membuka Jalan

Siapa yang tidak pernah mendengar nama Pythagoras? Di sekolah dasar, nama Pythagoras biasanya disebut dalam pelajaran matematika di tahun kelima atau keenam, ketika guru membahas *segitiga siku-siku*. Anda mungkin masih ingat, bila kita mempunyai segitiga siku-siku dengan *alas* a, *tinggi* b, dan *sisi miring* c, maka ada *Dalil Pythagoras* yang berbunyi: $a^2 + b^2 = c^2$. Dengan dalil ini, kita dapat menghitung panjang suatu sisi pada segitiga siku-siku bila diketahui panjang dua sisi lainnya.



Pythagoras adalah matematikawan Yunani Kuno yang hidup pada periode 570–500 SM. Ia dilahirkan di Samos, sebuah pulau kecil dekat Turki. Dibesarkan di era kejayaan Babilonia, Pythagoras belajar dari orang Babilonia tentang tripel *bilangan bulat* a, b, dan c yang memenuhi persamaan $a^2 + b^2 = c^2$, yang kemudian disebut sebagai *Tripel Pythagoras*. Contoh tripel Pythagoras adalah 3, 4, dan 5. Contoh lainnya adalah 5, 12, dan 13.

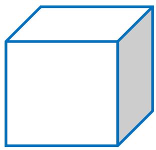
> Tripel Pythagoras *sesungguhnya telah diketahui jauh sebelumnya oleh orang Babilonia. Fakta ini terungkap dalam tablet tanah liat* Plimpton 322.

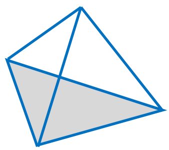
Barangkali perlu dicatat bahwa istri Pythagoras, yang bernama Theano, adalah juga seorang matematikawan. Kalau anda ditanya siapa matematikawan wanita pertama, maka jawabannya adalah Theano. Namun, jangan salah, Pythagoras sendiri bukanlah matematikawan pertama. Sebelumnya, ada Thales (~600 SM) yang menekuni astronomi, membuat kalendar, dan mengembangkan *matematika deduktif*. Salah satu dalil Thales menyatakan bahwa *sudut* pada setengah lingkaran merupakan sudut *siku-siku*.

Melanjutkan apa yang telah dirintis oleh Thales, Pythagoras bersama para murid dan penerusnya mengembangkan lebih lanjut pengetahuan matematika Babilonia menjadi "ilmu pengetahuan", dengan sejumlah teori, dalil-dalil, dan sistematika pembuktiannya. Selain terkenal karena dalilnya mengenai segitiga siku-siku, Pythagoras dan para penerusnya juga mempelajari banyak hal, antara lain: hubungan antara *nilai rata-rata aritmetik*, *nilai rata-rata geometrik*, dan *nilai rata-rata harmonik*, sifat-sifat *bilangan sempurna*, *polihedron reguler*, dan *irasionalitas* bilangan √2.

Polihedron reguler (beraturan) memang menarik. *Polihedron* adalah bangun ruang yang permukaannya terdiri dari sejumlah *poligon* atau segi-banyak. Sebagai contoh, *balok* merupakan polihedron dengan setiap muka pada permukaannya berbentuk persegi-panjang. Namun, *kerucut* dan *bola* bukan polihedron, karena permukaannya bukan segi-banyak. Polihedron reguler adalah polihedron yang semua mukanya merupakan segi-banyak beraturan yang *kongruen* (*sama* dan *sebangun*), dan terkait dengan itu semua sudut polihedral-nya juga kongruen. Sebagai contoh, *kubus* merupakan polihedron reguler: semua mukanya berbentuk persegi (bujursangkar).

Di antara semua polihedron, ternyata hanya ada lima polihedron reguler, yaitu: kubus, *tetrahedron*, *oktahedron*, *isokahedron*, dan *dodekahedron*. Pada awalnya, Pythagoras telah mengetahui empat polihedron pertama. Belakangan, salah seorang penerusnya yang bernama Hippasus (470 SM) menemukan dodekahedron.





Para murid lainnya marah karena Hippasus tidak “mendaftarkan” penemuan tersebut atas nama Pythagoras. Pasalnya, setiap murid dan penerus Pythagoras telah bersumpah untuk menaati semua peraturan yang ditetapkan Pythagoras, termasuk mencatatkan setiap penemuan atas nama Pythagoras. Karena pelanggaran yang di-lakukannya, Hippasus pun diusir dari padepokan Pythagoras.

Kisah seputar “kenakalan” Hipassus tidak hanya terkait dengan pe-nemuannya mengenai dodekahedron, tetapi juga dengan bocornya penemuan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan *bilangan irasional*. Penemuan tersebut semula dirahasiakan, karena Pythagoras telah berfalsafah bahwa “Semua adalah Bilangan”. Yang dimaksud dengan “bilangan” oleh Pythagoras tentu saja adalah *bilangan rasional* atau *pecahan*, karena pada saat itu konsep bilangan irasional belum dikenal. Namun, dalam perjalanannya, para murid Pythagoras ternyata menemukan bahwa tidak ada bilangan rasional R yang memenuhi $R^2 = 2$. Padahal, jika R menyatakan sisi miring segitiga siku-siku dengan alas dan tinggi sama dengan 1, maka menurut Dalil Pythagoras R haruslah memenuhi persamaan $R^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. (Dalam notasi sekarang, bilangan positif R tersebut dituliskan sebagai $\sqrt{2}$.) Karena tidak sesuai dengan falsafah Pythagoras, para muridnya sepakat untuk merahasiakan penemuan tersebut. Namun, ternyata Hippasus membocorkannya. Para murid setia Pythagoras pun berang dan konon Hippasus harus mati karena telah membocorkan rahasia penting itu.

Andaikan ada bilangan rasional $R = P/Q$, dengan P dan Q tidak mempunyai faktor sekutu selain 1, yang memenuhi $R^2 = 2$. Maka $P^2 = 2Q^2$, sehingga P^2 genap dan karenanya P juga genap. Tulis $P = 2n$. Maka $4n^2 = 2Q^2$, sehingga $Q^2 = 2n^2$ genap dan akibatnya Q juga genap. Ini bertentangan dengan asumsi awal bahwa P dan Q tidak mempunyai faktor sekutu selain 1.

Penasaran dengan nilai $\sqrt{2}$, seorang penerus Pythagoras yang bernama Archytas (428-347 SM) mengembangkan suatu metode untuk menaksir bilangan $\sqrt{c}$ sembarang secara *iteratif*. Metode ini memuat rangkaian langkah yang kemudian dikenal sebagai *Algoritma Euclid*. (Siapa itu Euclid akan dikupas nanti.)

Persisnya, misalkan X_1 adalah suatu bilangan (secara umum X_1 bisa rasional maupun irasional). Bentuk *barisan bilangan* $X_2, X_3, X_4, \ldots$ sebagai berikut:

$X_2 = 1/(X_1 - [X_1])$,

$X_3 = 1/(X_2 - [X_2])$,

… dan seterusnya, dengan [x] menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Kemudian, bentuk pula barisan bilangan P_1, P_2, P_3, … dan Q_1, Q_2, Q_3, … dengan

$P_1 = [X_1]$,

$P_2 = [X_2]\cdot P_1 + 1$,

$P_3 = [X_3]\cdot P_2 + P_1$,

… dan seterusnya, dan

$Q_1 = 1$,

$Q_2 = [X_2]$,

$Q_3 = [X_3]\cdot Q_2 + Q_1$,

… dan seterusnya.

Jika X_1 bilangan rasional, katakanlah $X_1 = P/Q$, maka untuk suatu n nilai X_n akan sama dengan suatu bilangan bulat, sehingga $X_n - [X_n] = 0$. Dalam hal ini, barisan terhenti pada langkah ke-n, dan P_n/Q_n merupakan *bentuk pecahan sederhana* dari P/Q. Sebagai contoh, jika $X_1 = 10/6$, maka $[X_1] = 1$, sehingga $X_2 = 1/(10/6 - 1) = 6/4$ dan $[X_2] = 1$. Selanjutnya, $X_3 = 1/(6/4 - 1) = 2$ dan $[X_3] = 2$. Jadi barisan terhenti pada langkah ke-3. Sekarang kita hitung

$P_1 = [X_1] = 1$

$P_2 = [X_2]\cdot P_1 + 1 = 1\cdot 1 + 1 = 2$

$P_3 = [X_3]\cdot P_2 + P_1 = 2\cdot 2 + 1 = 5$

dan

$Q_1 = 1$

$Q_2 = [X_2] = 1$

$Q_3 = [X_3]\cdot Q_2 + Q_1 = 2\cdot 1 + 1 = 3.$

Dalam hal ini kita peroleh $P_3/Q_3 = 5/3$, yang merupakan bentuk pecahan sederhana dari pecahan semula, yaitu 10/6.

Jika X_1 bilangan irasional, maka proses iterasi akan berlanjut terus. Bila kita hentikan iterasi pada langkah ke-n, maka P_n/Q_n merupakan suatu *hampiran* untuk X_1. Sebagai contoh, misalkan $X_1 = \sqrt{3}$. Maka, $[X_1] = 1$ dan dapat dihitung (dengan sabar) bahwa $X_{2i} = (1 + \sqrt{3})/2$ dan $X_{2i+1} = 1 + \sqrt{3}$, sehingga $[X_{2i}] = 1$ dan $[X_{2i+1}] = 2$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots$. Selanjutnya, kita dapat menghitung $P_1, P_2, \ldots, P_n$, dan $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, guna mendapatkan nilai hampiran P_n/Q_n untuk $\sqrt{3}$.

Pythagoras dan para muridnya telah membuka jalan yang memungkinkan generasi berikutnya menguak misteri lingkaran, sedikit demi sedikit. Dengan metode tadi, Archimedes (tokoh yang akan kita soroti nanti) melakukan perhitungan hingga iterasi ke-9 dan memperoleh nilai hampiran $\sqrt{3} \approx 265/153$. Ia kemudian memakai nilai hampiran ini untuk menaksir nilai $\pi \approx 22/7$.□