

## 6 Menguk Misteri Bilangan $\pi$

Penemuan Archimedes tentang bilangan  $\pi$  (yang merupakan rasio keliling dan diameter lingkaran) bukan merupakan akhir dari cerita tentang lingkaran. Sebaliknya, penemuan ini justru telah membuka pintu menuju pertanyaan berikutnya: berapakah nilai bilangan  $\pi$  itu sesungguhnya? Kemudian, apakah  $\pi$  merupakan bilangan rasional atau irasional?

Penasaran dengan nilai bilangan  $\pi$ , beberapa matematikawan dan ilmuwan generasi berikutnya mencoba mengungkap nilai  $\pi$ , atau persisnya menaksir nilainya dengan ketelitian yang lebih tinggi. Sebagai contoh, Claudius Ptolemy (~85–165 M), astronom dan ahli Geografi dari Alexandria, berhasil memperoleh taksiran  $\pi \approx 377/120 \approx 3,14166$ . Nilai taksiran ini diperolehnya dengan menggunakan segi 360 beraturan dan taksiran  $\sqrt{3} \approx 1,73205$ .

Seperti halnya di Yunani Kuno, bilangan  $\pi$  telah pula membuat beberapa matematikawan Tiongkok Kuno penasaran. Sejak awal abad ke-1, para matematikawan di sana telah menggunakan taksiran  $\pi \approx 3,1547$ . Sekitar tahun 265, Liu Hui menggunakan segi 3072 beraturan dan mendapatkan taksiran  $\pi \approx 3,1416$ . Taksiran ini diperoleh Liu Hui dengan melanjutkan hitung-hitungan Archimedes dari segi 96 ke segi 192, segi 384, segi 768, segi 1536, dan akhirnya segi 3072 ber-

aturan, tentunya dengan ketekunan yang luar biasa. Tak puas dengan hasil yang diperoleh Liu Hui, pada tahun 480-an, Zu Chongzi menggunakan segi 12288 beraturan dan memperoleh taksiran  $\pi \approx 355/113 \approx 3,1415929$ . Dengan hasil ini, Zu Chongzhi telah menaksir nilai  $\pi$  dengan tepat hingga 6 angka di belakang koma, suatu taksiran yang jauh lebih baik daripada taksiran Ptolemy.

*Seorang astronom India yang bernama Aryabhata menggunakan taksiran  $\pi \approx 3,1416$  dalam suatu perhitungan yang ia abadikan dalam bukunya pada tahun 499 M.*

Pada awal abad ke-9, matematikawan Persia yang bernama Al-Khwarizmi menggunakan taksiran  $\pi \approx 3,1416$ , yang mengisyaratkan bahwa hasil yang telah diperoleh sebelumnya oleh Zu Chongzi belum diketahui di Persia. Baru pada tahun 1430-an, Al-Khasi, yang juga berasal dari Persia, menghitung nilai bilangan  $\pi$  dengan

tepat hingga 15 angka di belakang koma. Hasil ini diperolehnya dengan sangat ulet, menggunakan segi  $6 \times 2^{27}$  beraturan!

Taksiran Al-Khasi tak tertandingi hingga akhir abad ke-16, ketika matematikawan Belanda Ludolph van Ceulen menghitung nilai  $\pi$  dalam bentuk desimal dengan tepat hingga 34 angka di belakang koma. Pada tahun 1630, Christoph Grienberger, seorang astronom dari Austria, berhasil menghitung nilai  $\pi$  dengan tepat hingga 37 angka di belakang koma. Seperti halnya Archimedes, Zu Chongzhi, dan Al-Khasi, Ceulen dan Grienberg menggunakan segi banyak beraturan untuk memperoleh taksiran tersebut.

Pada abad ke-17, tepatnya pada tahun 1660-an, Isaac Newton, seorang matematikawan dan fisikawan dari Inggris, menghitung nilai  $\pi$  dengan tepat hingga 15 angka (termasuk angka 3 di depan koma), tetapi dengan menggunakan metode yang berbeda.

Sebelumnya, Gottfried Wilhelm Leibniz, matematikawan dari Jerman, menemukan rumus *deret bilangan*

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \dots,$$

yang diperolehnya dari rumus *deret fungsi*

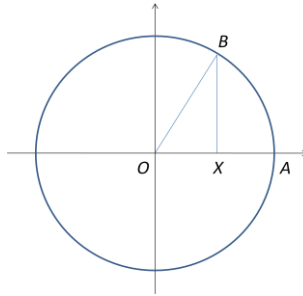
$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 - x^{11}/11 + \dots$$

dan fakta bahwa  $\arctan 1 = \pi/4$ . Menggunakan deret di atas, Leibniz dapat menghitung (atau menaksir) nilai  $\pi$ , dengan ketelitian yang diinginkan. Semakin banyak suku deret yang dipakai untuk menaksir nilai  $\pi$ , semakin teliti taksiran yang diperoleh. Sayangnya, untuk  $x = 1$ , deret di atas *konvergen* dengan ‘sangat lambat.’ (Untuk mendapatkan ketelitian hingga 4 angka di belakang koma, misalnya, kita harus menggunakan 5000 suku.)

Newton kemudian menggunakan rumus deret serupa tapi konvergen lebih cepat daripada deret Leibniz, yaitu

$$\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}}{32} + \left( \frac{1}{3 \cdot 8} - \frac{1}{5 \cdot 32} - \frac{1}{7 \cdot 128} - \frac{1}{9 \cdot 512} - \dots \right),$$

Rumus ini diperolehnya melalui perhitungan sebuah *integral* yang menyatakan suatu daerah di bawah busur lingkaran (lihat gambar). Pada gambar ini, kita mempunyai sebuah lingkaran berjari-jari 1.



Titik  $X = \frac{1}{2}$  adalah titik tengah  $OA$ . Luas sektor  $OAB$  sama dengan  $\frac{1}{6}$  kali luas lingkaran, yaitu  $\frac{\pi}{24}$ . Suku pertama di sebelah kanan tanda “=” pada rumus di atas adalah luas segitiga siku-siku  $OXB$ , sedangkan deret dalam tanda kurung adalah luas daerah yang dibatasi oleh ruas garis  $XA$ , ruas garis  $XB$ , dan busur lingkaran  $AB$ .

*Newton dan Leibniz dikenal sebagai penemu Teori Kalkulus, yang meliputi dua konsep penting, yaitu turunan dan integral. Kedua konsep ini bertumpu pada konsep limit, yang berkaitan dengan bilangan infinitesimal, sebagaimana dirintis oleh Antiphon dan Eudoxus.*

Mengetahui taksiran nilai  $\pi$  yang telah diperoleh sebelumnya oleh Grienberg, Newton menyadari bahwa hasil yang ia peroleh tidak terlalu bagus. Bahkan Newton menyatakan bahwa ia malu dengan penemuannya itu. Namun, Newton dan Leibniz telah menawarkan suatu cara baru untuk menaksir nilai  $\pi$  dengan menggunakan deret (baca: *Kalkulus*), tidak lagi menggunakan segi banyak beraturan (baca: *Geometri*).

Pada tahun 1706, seorang matematikawan Inggris yang bernama John Machin berhasil menghitung nilai bilangan  $\pi$  dengan tepat

hingga 100 angka (termasuk angka 3 di depan koma). Machin mendapatkan hasil ini dengan menggunakan rumus

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

dan deret Leibniz untuk  $\arctan x$ , dengan  $x = 1/5$  dan  $x = 1/239$ , yang konvergen lebih cepat daripada deret untuk  $\arctan 1$ . Perhatikan bahwa dengan menggunakan tiga suku saja, kita peroleh taksiran

$$\pi \approx 16(1/5 - 1/375) - 4/239 \approx 3,14.$$

[Bandingkan dengan Archimedes yang menghasilkan taksiran ini dengan susah payah melalui segi 96 beraturan.]

Apakah para matematikawan sudah puas dengan taksiran nilai  $\pi$  yang telah diperoleh oleh Machin? *Hmm...* beberapa matematikawan masih tertantang untuk menguak nilai bilangan  $\pi$  lebih jauh.

Pada tahun 1853, William Shanks menggunakan rumus Machin untuk menaksir nilai  $\pi$  hingga 707 angka. Namun, pada tahun 1945, Daniel F. Ferguson menemukan bahwa hasil Shanks ternyata hanya benar untuk 527 angka. Dengan menggunakan rumus

$$\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{1}{20} + \arctan \frac{1}{1985},$$

Ferguson berhasil menghitung nilai  $\pi$  dengan tepat hingga 710 angka pada tahun berikutnya. Taksiran tersebut diperoleh Ferguson secara manual, dengan bantuan sebuah *kalkulator mekanis*.

Memasuki era *komputer*, perhitungan nilai bilangan  $\pi$  berlanjut semakin seru. Pada tahun 1949, nilai  $\pi$  dapat dihitung dengan tepat

hingga 2000 angka. Seiring dengan perkembangan komputer, rekor ini diperbaiki menjadi 10.000 angka pada tahun 1958, dan kemudian menjadi 100.000 angka pada tahun 1961, atas nama John Wrench dan Daniel Shanks, keduanya dari Amerika Serikat.

Pada tahun 1973, Jean Guilloud dan Martine Bouyer, dua matematikawan dari Perancis, berhasil menghitung nilai  $\pi$  dengan tepat hingga 1 juta angka dengan menggunakan rumus

$$\frac{\pi}{4} = 12 \cdot \arctan \frac{1}{18} + 8 \cdot \arctan \frac{1}{57} - 5 \cdot \arctan \frac{1}{239},$$

dan tentunya dengan bantuan komputer yang lebih baik. Pada tahun 1987, rekor perhitungan nilai  $\pi$  telah mencapai 16 juta angka, dengan menggunakan rumus yang berbeda.

Pada tahun 2002, Yasumasa Kanada dan beberapa koleganya dari Universitas Tokyo, membukukan rekor dengan 1,2411 triliun angka. Rekor ini bertahan selama tujuh tahun. Pada tahun 2010, Shigeru Kondo (insinyur dari Jepang) dan Alexander Yee (ahli komputer dari Amerika Serikat) berhasil menghitung nilai  $\pi$  hingga 5 triliun angka, dan tiga tahun kemudian mereka mencetak rekor baru dengan 12,1 triliun angka.

Bilangan rasional seperti  $\frac{1}{2}$  dan  $\frac{1}{3}$  mempunyai bentuk desimal 0,5 (yang berhenti) dan 0,3333... (yang berulang). Dari bentuk desimalnya (lihat halaman berikut), dapat **diduga** bahwa bilangan  $\pi$  merupakan bilangan irasional, karena angka-angkanya yang berada di belakang koma cenderung tidak berhenti ataupun berulang. Tetapi bagaimana kita bisa **yakin** bahwa  $\pi$  adalah bilangan irasional?

3,1415926535897932384626433832795028841971693993751  
05820974944592307816406286208998628034825342117067  
08214808651328230664709384460955058223172535940812  
84811174502841027019385211055596446229489549303819  
64428810975665933446128475648233786783165271201909  
14564856692346034861045432664821339360726024914127  
37245870066063155881748815209209628292540917153643  
67892590360011330530548820466521384146951941511609  
43305727036575959195309218611738193261179310511854  
80744623799627495673518857527248912279381830119491  
29833673362440656643086021394946395224737190702179  
86094370277053921717629317675238467481846766940513  
20005681271452635608277857713427577896091736371787  
21468440901224953430146549585371050792279689258923  
54201995611212902196086403441815981362977477130996  
05187072113499999983729780499510597317328160963185  
95024459455346908302642522308253344685035261931188  
17101000313783875288658753320838142061717766914730  
35982534904287554687311595628638823537875937519577  
81857780532171226806613001927876611195909216420198  
93809525720106548586327886593615338182796823030195  
20353018529689957736225994138912497217752834791315  
15574857242454150695950829533116861727855889075098  
38175463746493931925506040092770167113900984882401  
28583616035637076601047101819429555961989467678374  
49448255379774726847104047534646208046684259069491  
29331367702898915210475216205696602405803815019351  
12533824300355876402474964732639141992726042699227  
96782354781636009341721641219924586315030286182974  
55570674983850549458858692699569092721079750930295  
53211653449872027559602364806654991198818347977535  
66369807426542527862551818417574672890977772793800

Kita dapat membuktikan dengan mudah bahwa  $\sqrt{2}$  irasional (lihat Bab 2), tetapi untuk  $\pi$  tidak semudah itu. Pembuktian irasionalitas  $\pi$  dilakukan pertama kali oleh Johann Heinrich Lambert pada tahun 1761, dengan menggunakan konsep *pecahan berlanjut* (*continued fraction*) yang terkait erat dengan Algoritma Euclid yang dibahas pada Bab 2.

Bilangan rasional atau pecahan seperti  $11/8$  dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan berlanjut sebagai berikut:

$$\frac{11}{8} = 1 + \frac{1}{8/3} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3/2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = [1; 2, 1, 2].$$

Notasi di ruas terakhir merupakan notasi baku untuk pecahan berlanjut. Perhatikan bahwa pada langkah pertama, kita memisahkan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil daripada atau sama dengan bilangan yang kita punyai, dan menyatakan sisanya sebagai  $1/x$ . Lalu kita ulangi proses ini pada langkah berikutnya terhadap bilangan  $x$ . Iterasi berhenti bila kita sampai pada bentuk *pecahan satuan*  $1/n$ , dengan  $n$  bilangan bulat positif. Kasus ini terjadi pada bilangan rasional, seperti pada contoh di atas. Namun, iterasi tidak akan berhenti bila kita tidak pernah sampai pada bentuk pecahan satuan. Kasus ini terjadi pada bilangan irasional. Sebagai contoh, bilangan  $\sqrt{3}$  mempunyai bentuk pecahan berlanjut  $[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$  yang tak berhenti.

Nah, bilangan  $\pi$  dapat pula dinyatakan dalam bentuk pecahan berlanjut sebagai  $[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \dots]$ . Tetapi ini belum membuktikan bahwa  $\pi$  irasional. Lambert menggunakan bentuk pecahan berlanjut untuk  $\tan x$ , dan berargumen: jika  $x$  rasional, maka  $\tan x$  irasional. Karena  $\tan \pi/4 = 1$  rasional, maka  $\pi$  mesti irasional.  $\square$