MATEMATIKA DI BALIK CITRA DIGITAL

Hendra Gunawan

Tulisan ini membahas bagaimana matematika berperan dalam pemrosesan citra digital, khususnya pengolahan dan penyimpanan citra dalam bentuk digital secara hemat dengan menggunakan transformasi wavelet Haar dan kompresi 'lossy'.

Pendahuluan

Biasanya kita menyimpan foto dalam sebuah album. Namun sekarang ini kita dapat menyimpan foto dalam sebuah *disket* atau *hard disk* komputer. Bagaimana caranya? Gampang saja, asal anda mempunyai *scanner* atau ---yang lebih mutakhir--- *kamera digital* dan tentunya komputer (dalam berbagai bentuk, termasuk *smart phone*).

Secara matematis, sebuah foto atau *citra* dapat dipandang sebagai suatu *fungsi* bernilai real yang terdefinisi pada suatu persegi panjang. Setiap titik pada persegi panjang tersebut dikaitkan dengan sebuah bilangan yang menyatakan *intensitas warna* citra di titik tersebut.

Dalam prakteknya, persegi panjang tadi dibagi atas sejumlah persegi panjang kecil yang disebut *pixel*. Setelah itu, setiap pixel dikaitkan dengan sebuah bilangan bulat di {0, 1, 2, ... , 255}. Untuk mudahnya, asumsikan citra kita berwarna hitam-putih. Pixel yang berwarna dominan hitam dikaitkan dengan bilangan 0, pixel yang berwarna dominan putih dikaitkan dengan bilangan 255, sementara pixel yang berwarna abu-abu dikaitkan dengan bilangan 1 s/d 254 bergantung pada *derajat keabuannya*.

Jadi terhadap fungsi tadi kita lakukan *digitalisasi*, sehingga kita peroleh sebuah *matriks* $\{a_{ij}\}$ dengan $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \ldots , 255\}$ menyatakan intensitas warna pixel P_{ij} yang berkaitan. Sebagai ilustrasi, citra dengan *resolusi* 4×4 pixel dapat dinyatakan sebagai matriks di bawah ini:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Ini kurang lebih yang dilakukan oleh scanner atau kamera digital: sebuah citra *dikonversi* menjadi sebuah matriks. Matriks inilah yang kemudian dapat disimpan dalam sebuah disket atau hard disk komputer. Selanjutnya, kita dapat menayangkan citra tersebut pada layar komputer, memperbanyaknya, dan/atau mencetaknya ke *printer* apabila menghendakinya.

Tampaknya semuanya begitu mudah, namun sebetulnya ada sedikit masalah. Citra *digital* yang diperoleh dari matriks tadi tidaklah sama dengan citra aslinya, tetapi hanya *menyerupai*. Semakin kecil pixel P_{ij}, semakin mirip citra digital tadi dengan citra aslinya. Namun ini berarti pula semakin besar ukuran matriks $\{a_{ij}\}$ dan semakin besar *memori* yang diperlukan untuk menyimpannya. Sebagai contoh, untuk menyimpan sebuah citra digital dengan resolusi 1024×1024 pixel dan 256 derajat keabuan diperlukan memori sebesar 1 MByte. Adakah cara untuk menghematnya?

Wavelet Haar

Sekitar 15 s/d 20 tahun yang lalu, suatu 'alat' ampuh yang dapat dipakai untuk memroses *signal* (suara ataupun citra) telah ditemukan. Alat tersebut dikenal dengan nama *wavelet* (secara harfiah berarti 'gelombang kecil'), yang menyaingi alat lama yakni *transformasi Fourier* dan berbagai modifikasinya. Sejak ditemukannya wavelet, dunia pemrosesan signal dan teknologi digital berkembang dengan pesat. Munculnya TV digital, kamera digital, telepon genggam, dan *cakram video digital* tidak lepas dari kemajuan dalam pemrosesan signal dan teknologi digital. *Computer graphics* tentunya juga menikmati semua kemajuan ini.

Wavelet sesungguhnya sudah ditemukan sejak tahun 1910 oleh seorang matematikawan Jerman bernama Haar. Namun, pada saat itu, keampuhannya dalam pemrosesan signal belum disadari oleh para matematikawan dan pengguna. Ia hanya dipandang sebagai suatu *basis ortonormal*, yang dapat dipakai untuk menguraikan fungsi menjadi suatu *deret Haar*, seperti halnya keluarga fungsi *sinus* dan *cosinus* yang digunakan oleh Fourier pada awal abad kesembilanbelas. Keunggulan wavelet Haar baru akan tampak apabila kita berurusan dengan fungsi diskrit tertentu.

Cara kerja wavelet Haar dalam pemrosesan signal dapat diilustrasikan sebagai berikut. Misalkan kita mempunyai sebuah signal atau citra digital berdimensi satu dengan resolusi 4, katakan:

$$12 \quad 10 \quad 4 \quad 6.$$

Untuk menguraikannya menjadi deret Haar, mula-mula kita hitung *nilai rata-ratanya* sepasang demi sepasang, sehingga kita peroleh:

$$11 \quad 5.$$

Untuk dapat memperoleh citra semula, kita perlu mencatat *koefisien detil* yang memuat informasi yang hilang.

Citra semula dapat diperoleh dengan cara menambah dan mengurangi nilai rata-rata tadi dengan koefisien detil ini. Pada contoh di atas, 12 dan 10 dapat diperoleh kembali dari 11 dengan cara menambah dan menguranginya dengan 1. Jadi, koefisien detil pertama adalah 1. Sementara itu 4 dan 6 dapat diperoleh kembali dari 5 dengan cara menambah dan menguranginya dengan -1. Jadi, koefisien detil kedua adalah -1. Selanjutnya, kita hitung lagi nilai rata-rata dari 11 dan 5, sehingga kita peroleh 8, dan kita catat koefisien detilnya, yakni 3.

Apa yang telah kita lakukan di atas dapat kita rangkumkan dalam tabel di bawah ini.

Resolusi	Nilai rata-rata	Koefisien detil
4	12 10 4 6	---
2	11 5	1 -1
1	8	3

Jadi, menggunakan wavelet Haar, citra digital 12 10 4 6 ditransformasikan menjadi deret 8 3 1 -1. Selanjutnya citra tersebut dapat disimpan sebagai deret ini. Cara memperoleh deret ini, yakni dengan penghitungan nilai rata-rata sepasang demi sepasang dan pencatatan koefisien detilnya secara rekursif, dikenal sebagai *filter bank*.

Perhatikan bahwa secara matematis, kita mempunyai kesamaan matriks (untuk contoh di atas):

$$(12\ \ 10\ \ 4\ \ 6) = 8(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1) + 3(1\ \ 1\ \ -1\ \ -1) + 1(1\ \ -1\ \ 0\ \ 0) - 1(0\ \ 0\ \ 1\ \ -1).$$

Matriks (1 1 1 1), (1 1 -1 -1), (1 -1 0 0), dan (0 0 1 -1) merupakan representasi dari empat *basis Haar* yang pertama, sedangkan 8, 3, 1, dan -1 merupakan *koefisien Haar* yang bersesuaian untuk matriks (12 10 4 6). Jadi, setelah transformasi, koefisien Haar inilah yang kita simpan.

Dibandingkan dengan penyimpanan langsung (tanpa transformasi), pe-nyimpanan citra digital sebagai deret Haar (yang diwakili oleh koefisien Haar) mempunyai beberapa keuntungan. Salah satu keuntungannya adalah semakin tinggi resolusi citra digital tersebut, semakin banyak koefisien Haar dan semakin kecil nilainya (banyak di antaranya malah akan bernilai nol). Pembulatan koefisien-koefisien Haar yang bernilai 'kecil' menjadi nol akan menghemat banyak memori penyimpanan dan tidak akan mengubah banyak citra semula.

Pemrosesan citra

Untuk memroses citra berdimensi dua, kita dapat menggunakan wavelet Haar berdimensi dua. Empat basis Haar (berdimensi dua) yang pertama adalah

1	1
1	1

1	1
-1	-1

1	-1
1	-1

1	-1
-1	1

Sebagai contoh, citra dengan resolusi 2×2 di bawah ini

13	11
9	3

dapat diuraikan menjadi deret Haar

9	9
9	9

3	3
-3	-3

2	-2
2	-2

-1	1
1	-1

Koefisien Haar yang bersesuaian dengannya adalah 9, 3, 2, dan -1. Koefisien inilah yang kita simpan untuk citra di atas.

Seperti tadi, semakin tinggi resolusi citra, semakin banyak koefisien Haar (paling banyak sama dengan resolusi citra tersebut) dan semakin kecil nilainya (banyak di antaranya akan bernilai nol). Dengan cara seperti ini, menyimpan citra dalam bentuk koefisien Haar akan menghemat memori tanpa mengubah bentuk citra tersebut (*lossless compression*). Jika koefisien-koefisien yang bernilai kecil ---lebih kecil daripada suatu bilangan *threshold* tertentu--- dianggap nol, maka kita dapat menghemat lebih banyak memori tanpa mengubah banyak citra semula (*lossy compression*).

Untuk *merekonstruksi* citra semula (tepatnya citra yang mirip dengan citra semula), suatu algoritma dapat dibuat. Di bawah ini kami berikan sebuah contoh citra standar 'Lena' dan hasil rekonstruksinya ---setelah transformasi Haar--- dengan tingkat *kompresi* 10% (yakni hanya 10% dari seluruh koefisien Haar yang dipakai). Silakan bandingkan dan uji mata anda!

Lena: asli

Lena: hasil rekonstruksi

(Catatan. Algoritma transformasi, kompresi, dan rekonstruksi dibuat oleh **Arianto Wibowo**, alumnus Jurusan Matematika ITB.)

Penutup

Wavelet Haar merupakan wavelet yang paling sederhana. Keampuhannya dalam pemrosesan citra hemat memori telah diperlihatkan di atas. Dengan algoritma yang lebih baik, tingkat kompresi dapat direduksi hingga 1% tanpa banyak mengurangi kualitas hasil rekonstruksinya. Sekarang ini sejumlah wavelet yang lebih canggih (beberapa di antaranya misalnya wavelet *Sinc*, wavelet *Topi Meksiko*, dan wavelet *Daubechies*) telah ditemukan dan banyak dipakai untuk berbagai keperluan.

Di samping untuk memroses citra, kini wavelet banyak pula dipakai untuk menganalisis berbagai signal atau gelombang. Penerapannya dalam bidang telekomunikasi, teknologi audio-visual, computer graphics, dan juga astronomi, geofisika, dan bahkan kedokteran, menunjukkan bahwa wavelet merupakan alat yang multiguna (*Proceedings of the IEEE* 1996).

Bandung, 27 Oktober 1997