0. Pendahuluan

Analisis Fourier mempelajari berbagai teknik menganalisis sebuah fungsi dengan menguraikannya sebagai deret atau integral fungsi tertentu (yang sifat-sifatnya telah kita kenal dengan baik, seperti fungsi polinom atau fungsi trigonometri). Analisis Fourier merupakan alat yang ampuh untuk memecahkan berbagai masalah, khususnya masalah yang berbentuk persamaan diferensial parsial yang muncul dalam sains dan ilmi rekayasa, dan tentunya untuk menganalisis signal seperti signal suara dan citra.

Materi kuliah terbagi atas dua bagian. Bagian pertama akan meliputi deret dan transformasi Fourier serta penggunaannya, yang merupakan materi klasik, sebagaimana dibahas dalam buku "Fourier Analysis and Its Applications" karangan G.B. Folland (Wadsworth 1992). Sementara itu pada bagian kedua kita akan berkenalan dengan wavelet, materi yang relatif baru dan sedang 'in' dewasa ini. Bagian kedua akan menyinggung pula dasar-dasar pemrosesan signal dan penggunaan wavelet dalam bidang tersebut.

Untuk memahami materi kuliah ini, Anda diasumsikan telah mengambil matakuliah Analisis Real (yang membahas konsep himpunan, bilangan real, fungsi, barisan, turunan, dan integral Riemann) dan Aljabar Linear Elementer (yang membahas ruang vektor, hasilkali skalar, dan lain-lain). Akan lebih menguntungkan bila Anda telah pula mengambil matakuliah Fungsi Kompleks, namun ini bukan suatu keharusan.

0.1 Notasi dan istilah, bilangan kompleks

Sebelum kita masuk ke materi, ada baiknya kita sepakati terlebih dahulu sejumlah notasi dan istilah yang akan kita pakai berulang-ulang.

Himpunan semua bilangan asli $\{1, 2, 3 \dots\}$ dinyatakan sebagai $\mathbf{N}$, sementara himpunan semua bilangan bulat $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ dituliskan sebagai $\mathbf{Z}$. Himpunan semua bilangan real dinyatakan sebagai $\mathbf{R}$, sementara himpunan semua bilangan kompleks dituliskan sebagai $\mathbf{C}$. Notasi berikut menyatakan interval di $\mathbf{R}$:

$$[a,b] := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}, \quad (a,b) := \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$$

$$[a,b) := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}, \quad (a,b] := \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}.$$

Pada umumnya kita akan bekerja dengan fungsi dari $\mathbf{R}$ ke $\mathbf{C}$, yakni fungsi yang terdefinisi di $\mathbf{R}$ (biasanya pada suatu interval di $\mathbf{R}$) dan bernilai kompleks. Namun sesekali kita akan membahas pula fungsi peubah banyak yang terdefinisi di $\mathbf{R}^d$, $d = 1, 2, 3, \ldots$, dan bernilai kompleks. Di sini $\mathbf{R}^d$ menyatakan himpunan semua titik $x = (x_1, \ldots, x_d)$ dengan $x_j \in \mathbf{R}\ \forall\, j = 1, \ldots, d$.

Mengingat bahwa kita akan senantiasa berhadapan dengan fungsi yang bernilai kompleks, di bawah ini kita tinjau kembali sejumlah sifat dasar bilangan kompleks, yang mungkin telah Anda pelajari dalam kuliah Fungsi Kompleks.

Bilangan kompleks dapat disajikan sebagai $z = a + bi$ dengan $a, b \in \mathbf{R}$ dan i adalah bilangan *imajiner* yang memenuhi $i^2 = -1$. Dalam hal ini a disebut *bagian real* dari z, ditulis $a = \mathrm{Re}(z)$; sementara b disebut *bagian imajiner* dari z, ditulis $b = \mathrm{Im}(z)$. Penjumlahan dan perkalian dua buah bilangan kompleks dapat dilakukan seperti halnya terhadap dua buah bilangan real:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Himpunan semua bilangan kompleks $\mathbf{C}$ dapat dipandang sebagai bidang $\mathbf{R}^2$:

[Gambar 0.1: Bidang Kompleks]

Modulus bilangan kompleks $z = a + bi$, ditulis $|z|$, diberikan oleh $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, yang menyatakan jarak Euclides dari z ke 0. Sebagaimana di $\mathbf{R}$, kita mempunyai *ketaksamaan* *segitiga* di $\mathbf{C}$:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Diberikan bilangan kompleks z, kita mempunyai $\bar{z}$, yang menyatakan *konjugasi* atau *kawan* dari z, yakni $\bar{z} = a - bi$. Untuk setiap $z \in \mathbf{C}$, berlaku

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z}),$$

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad z \text{ real jhj } z = \bar{z}.$$

Bilangan kompleks dapat pula dituliskan dalam bentuk polar:

$$z = re^{i\theta},$$

dengan $r = |z|$ dan $\theta = \arg(z)$=sudut yang dibentuk vektor z dengan sumbu real positif. Kita mempunyai *rumus Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Sebagai contoh, untuk $\theta = \pi$, kita mempunyai $e^{i\pi} = -1$, sebuah persamaan yang melibatkan empat bilangan penting yaitu $1, i, e$, dan π serta tanda minus.

Berbeda dari polinom real, setiap polinom kompleks senantiasa mempunyai akar, sebagaimana dijamin oleh teorema berikut:

Teorema (Teorema Dasar Ajabar) *Misalkan* $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *dengan* $a_n \neq 0$ *dan* $n \in \mathbf{N}$. *Maka, terdapat bilangan* $\alpha \in \mathbf{C}$ *sedemikian sehingga* $P(\alpha) = 0$.

0.2 Ruang Hilbert

Ruang Hilbert merupakan abstraksi alami dari $\mathbf{R}^3$, yang memiliki struktur linear vektor, hasilkali dalam, dan sifat kelengkapan.

Misalkan H ruang vektor atas $\mathbf{C}$. Pemetaan $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbf{C}$ yang memenuhi

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle, \quad \forall\, x, y, z \in H;\ \alpha, \beta \in \mathbf{C}$

(ii) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle, \quad \forall\, x, y \in H$

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0\ \forall\, x \in H$; $\langle x, x\rangle = 0$ jhj $x = 0$,

disebut *hasilkali dalam* pada H. Ruang vektor H atas $\mathbf{C}$ yang dilengkapi dengan hasilkali dalam $\langle\cdot,\cdot\rangle$ disebut *ruang hasilkali dalam.*

Pada ruang hasilkali dalam H dengan hasilkali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$, kita dapat mendefinisikan *norma*

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2},$$

yang memenuhi ketiga sifat berikut:

(i) $\|x\| \geq 0 \; \forall x \in H; \; \|x\| = 0$ jhj $x = 0$

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \quad \forall x \in H; \; \alpha \in \mathbf{C}$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in H$ (ketaksamaan segitiga).

Selanjutnya, untuk setiap $x, y \in H$, berlaku

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.

Hukum Jajarangenjang: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Kesamaan Polarisasi: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\right]$.

Pada ruang hasilkali dalam H yang telah dilengkapi dengan norma $\| \cdot \|$ kita dapat pula mendefinisikan *metrik*

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

yang memenuhi ketiga sifat berikut:

(i) $d(x, y) \geq 0 \; \forall x, y \in H; \; d(x, y) = 0$ jhj $x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y \in H$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \; \forall x, y, z \in H$ (ketaksamaan segitiga).

Sebagai ruang metrik atau ruang bernorma, H dikatakan *lengkap* apabila setiap barisan Cauchy (x_n) di H, yang memenuhi $d(x_m, x_n) \to 0$ $(m, n \to \infty)$, 'konvergen dalam norma' ke suatu titik $x \in H$, yakni $d(x_n, x) = \|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Ruang bernorma yang lengkap disebut *ruang Banach*. Ruang hasilkali H disebut *ruang Hilbert* apabila ia, sebagai ruang bernorma, merupakan ruang Banach. Contoh klasik ruang Hilbert adalah $\mathbf{C}^d$, himpunan semua titik $(z_1, \ldots, z_d)$ dengan $z_j \in \mathbf{C} \; \forall j = 1, \ldots, d$, yang dilengkapi dengan hasilkali dalam baku $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{d} z_j \bar{w}_j$.

Pembahasan tentang ruang Hilbert yang lebih mendalam dapat pula ditemui misalnya dalam buku "An Introduction to Hilbert Space" karangan N. Young.

0.3 Ukuran Lebesgue di R

Dalam Analisis Real, Anda telah mempelajari konsep integral Riemann. Dalam kuliah ini kita akan bekerja dengan integral Lebesgue, yang merupakan suatu perumuman dari integral Riemann. Walaupun Anda tidak akan dituntut untuk memahami konsep integral Lebesgue secara mendalam, ada baiknya Anda berkenalan dengan konsep ukuran Lebesgue yang mendasarinya pada kesempatan ini.

Panjang interval terbatas $I \subseteq \mathbf{R}$ yang mempunyai titik ujung a dan b didefinisikan sebagai $|I| = b - a$. Panjang interval tak terbatas didefinisikan sebagai ∞. Sekarang misalkan A suatu himpunan di $\mathbf{R}$. Keluarga interval $\{I_j\}$ dikatakan *meliputi* A apabila $A \subseteq \bigcup_j I_j$. *Ukuran luar* A kemudian didefinisikan sebagai

$$m^*(A) = \inf\{\textstyle\sum_j |I_j| : \{I_j\} \text{ meliputi } A\}.$$

Jelas bahwa ukuran luar sebuah interval sama dengan panjangnya, yakni $m^*(I) = |I|$. Tidak tertutup kemungkinan terjadi $m^*(A) = \infty$ untuk suatu $A \subseteq \mathbf{R}$. Secara umum, $m^*(A) \in [0, \infty]$.

Himpunan $A \subseteq \mathbf{R}$ dikatakan *terukur* apabila untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat himpunan tertutup $F \subseteq A$ dan himpunan terbuka $G \supseteq A$ sedemikian sehingga $m^*(G \setminus F) < \epsilon$. (Himpunan H dikatakan *terbuka* di $\mathbf{R}$ apabila $\forall\, x \in H\ \exists \delta > 0\ \ni (x - \delta, x + \delta) \subseteq H$; dan H dikatakan *tertutup* apabila $\mathbf{R} \setminus H$ terbuka.)

Tidak terlalu sukar untuk memeriksa bahwa jika A terukur, maka A' juga terukur; jika A dan B terukur, maka $A \cap B$ juga terukur; dan jika A_k terukur untuk setiap $k \in \mathbf{N}$, maka $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k$ juga terukur. Keluarga himpunan $\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbf{R} : A \text{ terukur}\}$ merupakan suatu *aljabar-*σ, yakni memenuhi

(a) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A' \in \mathcal{M}$

(b) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$

(c) $A_k \in \mathcal{M},\ k \in \mathbf{N} \Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k \in \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$ memuat semua himpunan terbuka, himpunan tertutup, himpunan F_σ (gabungan sejumlah terbilang himpunan tertutup), dan himpunan G_δ (irisan sejumlah terbilang himpunan terbuka) di $\mathbf{R}$. Fungsi m^* yang dibatasi pada $\mathcal{M}$ dikenal sebagai *ukuran Lebesgue* pada $\mathbf{R}$, biasa dilambangkan dengan m.

Himpunan $A \subseteq \mathbf{R}$ dikatakan *berukuran nol* apabila $m^*(A) = 0$. Himpunan berukuran nol jelas terukur, dengan $m(A) = m^*(A) = 0$. Sebarang himpunan terbilang jelas merupakan himpunan berukuran nol.

Suatu sifat atau pernyataan P pada $\mathbf{R}$ dikatakan berlaku *hampir di mana-mana* (*h.d.m.*) apabila P berlaku pada seluruh $\mathbf{R}$ kecuali pada suatu himpunan berukuran nol. Sebagai contoh, fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 0$ jika x irasional dan $f(x) = 1$ jika x rasional, dapat dikatakan sama dengan nol hampir di mana-mana.

Himpunan berukuran nol mempunyai peran yang cukup penting dalam teori integral. Misalnya kita mempunyai teorema berikut:

Teorema (Kriteria keterintegralan Riemann) *Misalkan $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ terbatas. Maka, f terintegralkan Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika f kontinu pada $[a, b]$ kecuali pada suatu himpunan berukuran nol.*

Dengan konsep ukuran Lebesgue, integral Riemann dapat diperumum menjadi integral Lebesgue — namun kita tidak akan membahasnya di sini. Pada umumnya kita akan bekerja dengan fungsi yang kontinu hampir di mana-mana, dan dalam hal ini integral Lebesgue dapat dianggap sebagai integral Riemann.

Beberapa teorema, seperti halnya teorema Fubini dan teorema Lebesgue tentang kekonvergenan barisan fungsi yang terdominasi, akan kita pakai begitu saja bilamana diperlukan. Bila pembaca ingin memahami konsep ukuran dan integral Lebesgue lebih jauh, silakan lihat buku "Real Analysis" karangan H.L. Royden (Prentice Hall, 1988), "Real and Complex Analysis" karangan W. Rudin (McGraw- Hill, 1986), atau buku lain yang membahas hal ini.