1. Mengapa Deret Fourier

Di bawah ini adalah dua contoh pemicu materi deret Fourier. Kedua contoh yang dipilih untuk dikemukakan di sini berkaitan dengan persamaan difusi atau persamaan panas untuk seutas kawat yang mengalami perubahan panas.

1.1 Persamaan panas untuk kawat lurus

Misalkan kita mempunyai seutas kawat yang panjangnya L dan penampangnya berbentuk lingkaran, terinsulasi pada permukaannya (sehingga suhu dapat keluar/masuk hanya melalui kedua ujungnya), dan suhu pada kedua ujungnya dipertahankan tetap sama dengan nol.

[Gambar 1.1: Kawat $[0, L]$]

Bila kawat tersebut kemudian mengalami perubahan panas (katakan karena dipanasi), maka suhu pada kawat tersebut akan memenuhi persamaan panas atau persamaan difusi

$$u_t = k u_{xx}$$

dengan syarat batas

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Di sini $u(x, t)$ menyatakan suhu kawat pada posisi x dan saat t, u_t turunan parsial terhadap t, dan u_{xx} turunan parsial kedua terhadap x; sementara k adalah konstanta difusi.

Dengan pemisahan peubah, kita misalkan $u(x, t) = X(x)T(t)$. Maka, kita akan peroleh

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Dengan membagi kedua ruas persamaan dengan $kX(x)T(t)$, kita dapatkan

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Karena ruas kiri hanya bergantung pada t, sementara ruas kanan hanya bergantung pada k, maka kedua ruas mestilah sama dengan suatu konstanta A, sehingga kita peroleh

$$T'(t) = AkT(t) \qquad (1)$$

$$X''(x) = AX(x) \qquad (2).$$

Solusi umum dari (1) adalah

$$T(t) = C_0 e^{Akt},$$

sementara solusi umum dari (2) adalah

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

(Secara umum A merupakan konstanta kompleks; $\lambda = \sqrt{-A}$ adalah bilangan kompleks yang memenuhi $\lambda^2 + A = 0$.)

Persyaratan $X(0) = 0$ memaksa $C_1 = 0$, dan $X(L) = 0$ memberikan $C_2 \sin \lambda L = 0$. Dengan menganggap $C_2 \neq 0$, kita peroleh $\sin \lambda L = 0$ yang berarti bahwa $\lambda L = n\pi$ dan karenanya $A = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, dengan $n \in \mathbf{Z}$. Namun kita di sini cukup mengambil $n \in \mathbf{N}$ mengingat kasus $n = 0$ hanya menghasilkan solusi nol dan mengganti n dengan $-n$ sama saja dengan mengganti C_2 dengan $-C_2$. Dengan demikian kita peroleh solusi

$$u_n(x,t) = e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Dengan mengambil kombinasi linearnya dan dengan proses limit, kita mempunyai solusi yang berbentuk deret

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

dengan $a_n \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$.

Misalkan, sebagai informasi tambahan, diketahui syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Solusi di atas akan memenuhi syarat ini jika dan hanya jika koefisien a_n memenuhi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Masalahnya kemudian adalah adakah a_n yang memenuhi persamaan ini dan, bila ada, bagaimana menentukannya.

1.2 Persamaan panas untuk kawat melingkar

Misalkan kawat tadi ditekuk sehingga membentuk lingkaran (dengan kedua ujungnya bertemu) dan kita ingin mengetahui distribusi panas pada kawat bila kawat tersebut dipanasi. Di sini posisi setiap titik ditentukan oleh sudut θ yang dapat diukur dari suatu titik acuan tertentu.

[Gambar 2.1: Kawat Melingkar]

Karena jarak linear pada lingkaran sebanding dengan jarak sudut ($x = r\theta$, dengan r = jejari lingkaran), persamaan difusi $u_t = ku_{xx}$ menjadi

$$u_t = k_0 u_{\theta\theta}$$

dengan $k_0 = \frac{k}{r^2}$. Dengan menuliskan $u(\theta,t) = \Theta(\theta)T(t)$, kita peroleh (seperti sebelumnya)

$$T(t) = C_0 e^{Ak_0 t}$$

$$\Theta(\theta) = C_1 \cos\theta\sqrt{-A} + C_2 \sin\theta\sqrt{-A}$$

untuk suatu konstanta kompleks A.

Sekarang kita tidak mempunyai persyaratan batas karena lingkaran tidak berujung. Namun, mengingat θ dan $\theta+2n\pi$ menyatakan sebuah titik yang sama, fungsi $\Theta(\theta)$ mestilah periodik dengan periode 2π:

$$\Theta(\theta + 2n\pi) = \Theta(\theta), \quad \forall\,\theta \in [0, 2\pi),\ n \in \mathbf{Z}.$$

Syarat ini tidak 'membunuh' C_1 ataupun C_2, tetapi memaksa $\sqrt{-A} = n \in \mathbf{Z}$, sehingga pada akhirnya kita dapatkan solusi yang berbentuk

$$u(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) e^{-n^2 k_0 t}.$$

Jika diketahui syarat awal $u(\theta, 0) = f(\theta)$, maka kita peroleh

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Masalahnya lagi-lagi adalah dapatkah f, yang merupakan fungsi periodik dengan periode 2π, dinyatakan sebagai deret seperti di atas dan, bila dapat, bagaimana menentukan koefisien a_n dan b_n yang memenuhi persamaan tersebut.

Deret trigonometri pada ruas kanan persamaan di atas kelak disebut sebagai deret Fourier, sementara bilangan-bilangan a_n dan b_n (yang bergantung pada fungsi f yang diberikan) disebut sebagai koefisien Fourier. Tanda " $=$ " pada persamaan tersebut berarti bahwa deret pada ruas kanan konvergen ke nilai fungsi f di titik θ. Secara umum, kekonvergenan ini hanya berlaku hampir di mana-mana, tidak 'titik demi titik'.

1.3 Soal Latihan

1. Tinjau persamaan gelombang $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ untuk seutas kawat yang panjangnya L, dengan syarat batas $u(0, t) = u(L, t) = 0$ dan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$ dan $u_t(x, 0) = g(x)$. Dengan pemisahan peubah, peroleh solusi berupa deret

   $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right),$$

   dengan a_n memenuhi

   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

   dan b_n memenuhi

   $$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$