10. Transformasi Fourier

Dalam beberapa bab ke depan, kita akan membahas transformasi Fourier, sifat-sifatnya, dan aplikasinya. Seperti halnya pada pembahasan deret Fourier, pendekatan yang diambil dalam pembahasan transformasi Fourier di sini sama dengan pendekatan dalam buku "Fourier Analysis and Its Applications" karangan G.B. Folland (Wadsworth, 1992).

10.1 Pengantar

Pada Bab 4, kita telah membahas deret Fourier pada interval $[-L, L]$ sembarang, yakni

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad |x| \le L,$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dengan sedikit modifikasi, kita dapat menuliskan ulang rumus di atas sebagai

$$f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,L} e^{in\pi x/L},$$

dengan

$$c_{n,L} = \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

Selanjutnya misalkan $\Delta\xi := \frac{\pi}{L}$ dan $\xi_n := n\Delta\xi = \frac{n\pi}{L}$. Maka

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,L} e^{i\xi_n x} \Delta\xi,$$

dengan

$$c_{n,L} = \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\xi_n x} dx.$$

Jika $f(x) \to 0$ cukup cepat untuk $|x| \to \infty$, maka $c_{n,L}$ tidak akan berbeda banyak apabila daerah pengintegralannya diperluas dari $[-L, L]$ ke $(-\infty, \infty)$, yakni

$$c_{n,L} \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi_n x}dx = \widehat{f}(\xi_n), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dalam hal ini,

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi_n)e^{i\xi_n x}\Delta\xi, \quad |x| \le L.$$

Ini mirip dengan jumlah Riemann dari $\widehat{f}$ pada $(-\infty, \infty)$. Jika $L \to \infty$, maka $\Delta\xi \to 0$ dan ξ_n semakin memadati $\mathbf{R}$, sehingga $\approx$ dapat digantikan dengan $=$ dan rumus di atas menjadi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi, \quad x \in \mathbf{R}, \qquad (1)$$

dengan

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx, \quad \xi \in \mathbf{R}. \qquad (2)$$

Kalkulasi ini tentu saja masih merupakan kalkulasi kasar, namun untuk f tertentu kalkulasi ini berlaku. Rumus (2) disebut *transformasi Fourier* dari f, dan rumus (1) merupakan rumus inversi Fourier, yang merupakan cara untuk memperoleh f kembali dari $\widehat{f}$ – yang akan kita buktikan kelak secara cermat.

10.2 Ruang $L^1(\mathbf{R})$ dan $L^2(\mathbf{R})$

Untuk merapikan definisi transformasi Fourier dan mempelajari sifat-sifatnya, kita perlu beberapa asumsi, istilah dan notasi. Pertama, fungsi yang akan kita bahas selnjutnya adalah fungsi yang terdefinisi pada $\mathbf{R}$. Seperti ketika kita mendefinisikan deret Fourier, kita asumsikan bahwa f terintegralkan (mutlak) pada $\mathbf{R}$. Untuk itu, kita definisikan ruang $L^1 = L^1(\mathbf{R})$ sebagai ruang semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbf{R}$, yakni

$$L^1 := \Big\{ f \, : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty \Big\}.$$

Ruang L^1 dilengkapi dengan norm $\| \cdot \|_1$ yang rumusnya adalah

$$\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx.$$

Sebagai perluasan dari $L^2(a,b)$, kita juga mendefinisikan ruang $L^2 = L^2(\mathbf{R})$ sebagai ruang semua fungsi f yang kuadratnya terintegralkan, yakni

$$L^2 := \Big\{ f \,:\, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty \Big\}.$$

Ruang L^2 dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_2$ yang rumusnya adalah

$$\|f\|_2 := \Big[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \Big]^{1/2}.$$

Catat bahwa tidak ada hubungan 'urutan' di antara L^1 dan L^2. Sebagai contoh, tinjau

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2/3}, & \text{jika } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dan

$$g(x) = \begin{cases} x^{-2/3}, & \text{jika } x > 1, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Maka $f \in L^1$ tetapi $f \notin L^2$, sementara $g \in L^2$ tetapi $g \notin L^1$.

Walaupun demikian, ada dua fakta yang kelak berguna bagi kita mengenai kedua ruang ini, yaitu:

(1) Jika $f \in L^1$ dan f terbatas pada $\mathbf{R}$, maka $f \in L^2$. Persisnya

$$|f| \le M \Rightarrow |f|^2 \le M|f| \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \le M \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty.$$

(2) Jika $f \in L^2$ dan f bernilai 0 di luar suatu interval $[a,b]$, maka $f \in L^1$. Persisnya

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx = \int_a^b 1 \cdot |f(x)| \, dx \le (b-a)^{1/2} \Big[\int_a^b |f(x)|^2 dx \Big]^{1/2} < \infty.$$

`Catatan`. Ruang L^1 dan L^2 merupakan kasus khusus dari ruang Lebesgue $L^p = L^p(\mathbf{R})$, $1 \le p \le \infty$ yang beranggotakan semua fungsi f sedemikian sehingga $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$.

10.3 Transformasi Fourier

Misalkan $f \in L^1$, yakni $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty$. *Transformasi Fourier* dari f, yang kita tuliskan sebagai $\widehat{f}$, didefinisikan oleh

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Seperti halnya dalam pembahasan deret Fourier, pertanyaan kita adalah bagaimana kita dapat memperoleh f kembali dari $\widehat{f}$. Kesamaan (1) menyarankan kita untuk mendefinisikan *invers transformasi Fourier* dari g, yang dituliskan sebagai $\breve{g}$, sebagai

$$\breve{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Teorema inversi Fourier, yang akan kita bahas nanti, menyatakan bahwa

$$(\widehat{f})\check{}(x) = f(x), \quad \text{h.d.m.}$$

asalkan f dan $\widehat{f}$ terintegralkan.

Sebelum sampai ke sana, kita pelajari dahulu sifat-sifat dasar transformasi Fourier.

Teorema. Jika $f \in L^1$, maka $\widehat{f}$ terbatas pada $\mathbf{R}$.

Bukti. Perhatikan bahwa untuk setiap $\xi \in \mathbf{R}$ berlaku

$$|\widehat{f}(\xi)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2\pi i\xi x} f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \|f\|_1.$$

Jadi $\widehat{f}$ terbatas pada $\mathbf{R}$, dengan $\|\widehat{f}\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| \le \|f\|_1$. (QED)

Teorema. Jika $f \in L^1$, maka $\widehat{f}$ kontinu pada $\mathbf{R}$.

Bukti. Untuk setiap ξ dan $h \in \mathbf{R}$,

$$\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}(e^{-ihx} - 1) f(x)\, dx,$$

sehingga

$$|\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ihx} - 1|\, |f(x)|\, dx.$$

Integran di ruas kanan didominasi oleh $2|f(x)|$ dan menuju 0 apabila $h \to 0$. Jadi, menurut Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue, ruas kanan mestilah menuju 0 apabila $h \to 0$, dan akibatnya ruas kiri juga menuju 0 apabila $h \to 0$. (QED)

Teorema (Riemann-Lebesgue) Jika $f \in L^1$, maka $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Bukti. Perhatikan bahwa $-\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi(x+\frac{\pi}{\xi})} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \frac{\pi}{\xi}) e^{-i\xi x} dx$. Karena itu

$$2\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - (-\widehat{f}(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(f(x) - f\big(x - \frac{\pi}{\xi}\big)\Big) e^{-i\xi x} dx,$$

sehingga

$$2|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Big| f(x) - f\big(x - \frac{\pi}{\xi}\big) \Big| \, dx.$$

Karena $f \in L^1$, maka (menggunakan kekontinuan dalam norma di L^1) ruas kanan akan menuju 0 apabila $|\xi| \to \infty$. Dengan demikian ruas kiri pun mestilah menuju 0 apabila $|\xi| \to \infty$. (QED)

Akibat. Transformasi Fourier $\mathcal{F}$ memetakan fungsi f di L^1 ke fungsi $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ di $C_0(\mathbf{R})$.

`Catatan`. $C_0(\mathbf{R})$ adalah ruang fungsi kontinu dan terbatas pada $\mathbf{R}$ dengan limit nol di $\pm\infty$. Notasi $\mathcal{F}f$ akan kita gunakan secara bergantian dengan notasi $\widehat{f}$ untuk menyatakan transformasi Fourier dari f.

Berkenaan dengan translasi dan dilasi, transformasi Fourier mempunyai sifat sebagai berikut.

Teorema Misalkan $f \in L^1$ dan $a \in \mathbf{R}$.

(i) Jika $g(x) := f(x - a)$, maka $\widehat{g}(\xi) = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi)$;

(ii) Jika $g(x) := e^{iax}f(x)$, maka $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a)$.

Selanjutnya, misalkan $\delta > 0$.

(iii) Jika $g(x) := \delta^{-1}f(x/\delta)$, maka $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\delta\xi)$;

(iv) Jika $g(x) = f(\delta x)$, maka $\widehat{g}(\xi) = \delta^{-1}\widehat{f}(\xi/\delta)$.

Berkenaan dengan operasi turunan dan perkalian dengan peubah bebasnya, transformasi Fourier mempunyai sifat sebagai berikut.

Teorema Misalkan $f \in L^1$. Jika f kontinu dan mulus bagian demi bagian pada $\mathbf{R}$, dan $f' \in L^1$, maka

$$(f')\widehat{\ }(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi).$$

Sebaliknya, jika $g(x) := xf(x)$ terintegralkan mutlak pada $\mathbf{R}$, maka $\widehat{g}(\xi) = i(\widehat{f})'(\xi)$.

Berikut ini adalah beberapa contoh transformasi Fourier dari fungsi-fungsi tertentu.

Contoh 1. Jika $f = \chi_{[-a,a]}$ $(a > 0)$, maka $\widehat{f}(\xi) = 2\frac{\sin a\xi}{\xi}$.

Contoh 2. Jika $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ $(a > 0)$, maka $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}$.

Contoh 3. Jika $f(x) = e^{-ax^2}$ $(a > 0)$, maka $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}$.

Contoh 1 dapat dihitung langsung, sementara Contoh 2 memerlukan teorema residu (untuk suatu integral fungsi kompleks yang berpadanan). Untuk Contoh 3, perhatikan bahwa f memenuhi persamaan diferensial $f'(x) + axf(x) = 0$. Kenakan transformasi Fourier pada persamaan ini, kita peroleh persamaan diferensial yang dipenuhi oleh $\widehat{f}$, dan akhirnya kita peroleh rumus untuk $\widehat{f}$.

10.4 Soal Latihan

1. Buktikan dua teorema terakhir di atas.
2. Buktikan tiga contoh transformasi Fourier di atas.